# 第三版序言

这本书，它的第三版现在与读者见面，在延续四分之一的世纪中伴随着群论的发展，并在力所能及的范围内促进了它．作者在1940年写完了这本书的第一版，次年看过了两次校样，只是由于战时的条件把此书的出版延迟到1944年． 在第一版的引论部分——此引论的大部分内容将在下面重新给出——说明了作者在写此书时所追求的目标．

在四十年代，一般群论经历了蓬勃的发展．在阿贝尔群论，直积的理论，可解群、幂零群以及具各种有限条件群的理论中得到特别巨大的成就．由 О. Ю. Шмидт 奠基的苏联群论学派在此发展中起了很重要的作用．特别，许多按本书的第一版学习群论的年青苏联代数学者作了许多工作——这里提醒一下，本书的打字稿从1940年便保留在莫斯科大学数学力学阅览室中并供研究学习之用．

本书的第二版，它完成于1952年而出版于1953年，反映了截至五十年代初期群论所达到的状况．这实际上是一本新书，有新的安排，有许多新的章节，并把由第一版转引来的材料重新改写了．只是由于新书在自己的基础中含有原来的并且在想法上和它非常接近，使得作者对它保留了原来的目录．

在这段时间内本书的出版在世界范围内有了反响．即是，在1953年在德意志民主共和国出现了第一版的德文译本．晚一些出版了第二版的译本：在1955年出的匈牙利译本，1955和1956年分两册出的英(美国)译本，1959年罗马尼亚译本，1960和1961年分两册出的日译本，1964年出的中译本(上册)．这使得这本书在世界许多国家中参与群论的发展．

五十年代和六十年代前一半是群论进一步向前发展的时期. 解决了许多问题，它们曾经是常年，有时是几十年悬而未决的. ——这里我们指出例如关于周期群的 Burnside 问题，以及关于具有有限定义关系式群的判定问题. 阿贝尔群经历了根本的改造. 在可解群和幂零群论中完成了许多工作. 形成了一系列新的方向，——这里我们譬如点出群的流形理论，群类（亦即抽象的群的性质)的理论，群上的运算理论，自同构群以及群对偶理论. 在群论的基础部分也出现了一些本质性的变化，例如，从带算子的群过渡到多元算子群即是其中一个.

在这一期间关于一般群论研究的迅猛程度可以有一个量的刻划. 即是，本书第二版中的文献索引是相当完全的，它大致有五百篇论文. 另一方面，在第二版完成后的这些年中，关于无限群的一般理论(即是，除去关于有限群的，关于置换群的，关于线性群的，关于 Lie 及《代数》群的，关于拓扑群的，关于有序群的，关于模论等等的工作以外)发表了不少于 1300 篇论文（其中近三分之一是苏联作者的工作).

在近年中出版了一些专著，论述一般群论的某些个别的分枝. 这样专题性的著作在今后亦将出现，这是完全自然的. 但是，我们大家都明白，除这些著作外需要有综合性的论述，它能从整体上反映群论并能作为统一的学科保留着它. 在这些年中在不同的国家中出现了一些一般性质的书，每一本都有自己的成就，但遗憾的是，其中的任一本都不能完全地满足上述要求. 这就是本书新版出世的原因.

作者清楚地的知道，实际上应该写一本完全新的书. 然而作者还知道，在上面已谈到的这种非常丰富的材料下，这本书该是三册的，而作者已无法安排这样巨大量的工作. 因此这个第三版有一个非常不寻常的形式.

这就是，除了不多的一些变动，例如纠正个别不准确的地方以及一些误印或者符号的某些近代化，在其中保留了第二版的全部内容．可为这种再版旧的原文辩解的是此书已很久脱销了——甚至某些年青的苏联群论工作者在自己家中也没有它．

本书印数不多的第一版就更是少见了．但是，正如作者在第二版序言中所说过的，"遗憾的是，由于无法避免全书篇幅的增大，作者不得不把旧书的许多地方完全删去，有时甚至要删去整个的一节，而这些内容在当时把它们收入本书中并不算错"．第二版的读者不止一次地被介绍去参考第一版的相应章节；并且直到现在不得不引用本书第一版的还有其他一些作者．

由于这个原因在第三版中在第二版的原文间插入第一版中的某些材料．有时这是一些整个的节；此时它们的编号同于其前面的第二版中节号而缀以字母 a(有时是 b 和 c)，读者不难由目录中找到这些节．在 §§23，26，33，35，42，44，53，54 中也插入了第一版中某些内容．

这就是本书的基本课文．书中还包含《第一版的结束语》．当然，经过了四分之一世纪它已完全失去了作为指明群论进一步发展道路的纲领性文章的意义，其中有许多现在看起来甚至是天真的，但是，把当时还年青的作者所提出的纲领与科学的实际发展对比一下是大有教益的．我们在《结束语》的原文中没有引入任何变动；只是引用第一版的各节时附加以本书基本课文相应节的编号(用圆括号括起来)，此外，无论是基本课文的还是后面的《补充》的节号则用方括号，在这些节中读者可以找到所考察问题的进一步发展的信息．

标名为《1952—1965 年无限群论的发展》的《补充》该是对专家来说最有益的．作者试图在其中给出本书第二版写完以后的这些年中一般群论发展的概况．也将谈到某些早期的工作，那是因

为作者认为在第二版中没有充分反映它们是不应该的. 当然, 另一方面, 作者无法以应有的完善在这个总结中反映最近几年的文献, 然而这一点可以由发表在《科学的汇总》丛书中的一些总结文章来补充.

《补充》的计划没有重复基本课文的计划而是更接近于说明: 如果作者现在要写一本关于群论的新书的话, 那么这本书的计划就该是这样的.《补充》中不包含任何证明; 但是在其中给出了所有必要的定义并叙述了某些结果. 在《补充》中总的涉及近一千一百篇文章, 它们没有被包含在第二版的文献索引中; 然而, 其中的一些仅是提到一下. 所有这些文章且仅仅是这些被补充地纳入文献索引中. 和通常一样, 引用文献时在课文中指出作者的姓以及所引文章的编号(置于方括号中).

在基本课文中有很多次注明参看《补充》. 此时, 形如(参看补充 12.3)的注释说明:《参看补充中 § 12, 第三点》.

在《补充》的课文中, 除去它的序言外, 几乎没有提到关于有限群论的结果. 在本书第二版序言中, 作者说过:"在准备第一版时, 作者面临的任务是要指出群论不应该只是有限群论, 因而在书中几乎不包含任何关于有限群的特别叙述. 现在这个任务可以认为已经完成. 相反地, 提出了新的问题——要注意到有限群论是一般群论的一个重要组成部分. 尽管已在书中补充了关于有限群论的一些题材, 然而最后这个问题在本书中还是没有解决." 关于有限群论的各种问题所发表的论文数量非常的巨大, 这使得作者无法在编写第三版的《补充》时试图解决这一任务, 虽然作者懂得, 如果最初被分化出去的分枝重新成为统一理论的有机组成部分, 那么威胁群论向个别孤立的一些分枝的分化就该在某种程度的受到阻止.

在群论中在近年来完成了非常多的工作, 群论的研究非常蓬

勃的进行着，因而可能作者现在较困难去重复在第一版序言中所说过的下面的话:“一般群论还没有走过自己发展的顶峰”。但是，毫无疑问，群论仍将长久地对于更一般的代数理论，例如像泛代数论和范畴论，保留着新思想的基本供给者和试验打靶场的地位.因此，可以期待在最近一些年群论研究的兴旺程度仍会是很高的.如果本书的新版仍能在一段时间对研究群论的代数工作者有所帮助，作者将是非常高兴的.

作者对在编写本书第三版时对作者作出帮助和支持的一切人表示衷心的感谢，首先是А. П. Мишина, А. Л. Шмелькин 和 Е.Г. Шульгейфер. 作者特别感谢 О. Н. Головин，他花费巨大劳动编辑本书而这一点使作者能再一次有他作自己的合作者而感到愉快——我提醒一下，特别Олег Николаевич还是本书第一版的编辑.

库洛什(А. Курош)

莫斯科 1966 年 11 月

# 下册目录

## 第四篇 可解群与幂零群

# 第三篇 群的构造

## 第九章 自由积和自由群

### § 33. 自由积的定义

在 § 17 中引入的群的直积在群论中起着很重要的作用，这一点至少可以由前面介绍阿贝尔群的几章中看到．另外一个也是非常有益的这种类型的构造就是群的自由积．与直积类似，自由积给出由已给群构造新群的一种可能的途径．它与直积的区别在于，在其定义内舍去在直积定义中的一项规定，这规定要求属于不同直因子的元素彼此是可交换的．自由积的确切定义如下．

群 $G$ 叫作其异于 $E$ 的子群 $A_\alpha$($\alpha$ 取遍某一足码集）的自由积，如果这些子群 $A_\alpha$ 总合起来生成整个群 $G$，即 $G$ 中任一元素 $g$ 可表成取自这些 $A_\alpha$ 中有限个元素的乘积

$$g=a_1a_2\cdots a_n, \quad a_i\in A_{\alpha_i}, \quad i=1, 2, \cdots, n; \tag{1}$$

并且如果假定这些元素 $a_i$ 都异于单位元而(1)中相邻的两个元素没有属于同一个子群 $A_\alpha$ 者，则 $G$ 中任一元素 $g$ 的形如(1)的表示法是唯一的．当然一般说在这样的唯一表示法(1) 中可能包含若干个因子，它们是属于同一子群 $A_\alpha$ 的．

我们用符号

$$G=\prod_\alpha{}^* A_\alpha \tag{2}$$

表示自由积，而当群 $G$ 是其有限个子群 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的自由积时，则用符号

$$G = A_1^* A_2^* \cdots {}^* A_k.$$

子群 $A_\alpha$ 叫作群 $G$ 在自由分解(2)中的自由因子. 称表示式(1)(在上述关于它的假设下)为元素 $g$ 关于分解(2) 的最简表示式, 而 $n$ 叫作在此分解中元素 $g$ 的长度(记作: $n = l(g)$).

由元素的最简表示式的唯一性得, (2)中的自由因子 $A_\alpha$ 与 $G$ 在此分解中的所有其余自由因子生成的子群之交等于 $E$.

设群 $G$ 分解为其真子群的自由积. 若(2)是它的分解,则我们由(2) 的不同自由因子中取出两个异于单位元的元素 $a_1$ 和 $a_2$. 由自由积的定义得,乘积 $a_1a_2$ 和 $a_2a_1$ 是 $G$ 中不同的元素, 这样即使(2)的所有自由因子 $A_\alpha$ 都是阿贝尔群, 群 $G$ 也必是非交换的. 其次,所有乘积

$$a_1a_2,\ a_1a_2a_1a_2,\ \cdots,\ (a_1a_2)^n,\ \cdots$$

也都是 $G$ 的不同元素,这样即使所有自由因子 $A_\alpha$ 都是周期群, 群 $G$ 也必是含无限阶的元素. 因此, 无论是阿贝尔群, 还是周期群(也包含有限群)都不能分解为自由积.

自由群是可以分解为自由积的, 即是自由(非循环)群是无限循环群的自由积. 事实上,设在自由群 $W$ 中给定自由生成元 $x_\alpha$ 的系. 若 $A_\alpha = \{x_\alpha\}$, 则群 $W$ 显然由子群 $A_\alpha$ 生成,而 $W$ 中任意元素,即是关于符号 $x_\alpha$ 的字, 可唯一地记成元素 $x_\alpha$ 的幂的积. 故群 $W$ 是其无限循环子群 $A_\alpha$ 的自由积[1].

和直积的情形相同, 我们完全可以谈论任意一些预先给定群的自由积, 这是因为我们有下面这个构造, 它是在 §18 中曾用之引入自由群的构造方法的一个自然的推广.

设给定任意一些群 $A_\alpha$ 的集. 所谓字是指元素的任意有序组

$$w = a_1a_2\cdots a_n, \tag{3}$$

1) 应当指出,对于自由群来说,上面引入元素的长度的概念和 §18 中引入的同名概念不相同.

其中长 $n\geqslant1$，任意 $a_i$ 是某一群 $A_\alpha$ 中异于单位元的元素且任意相邻元素 $a_i$ 和 $a_{i+1}$ 属于不相同的群 $A_\alpha$. 除此之外，还认定，$n=0$ 的情形对应着空字. 若给定字(3)及字

$$w'=a'_1a'_2\cdots a'_m,$$

则我们规定 $w$ 和 $w'$ 的乘积如下：设

$$a'_1=a_n^{-1},\ a'_2=a_{n-1}^{-1},\ \cdots,\ a'_i=a_{n-i+1}^{-1},\ 0\leqslant i\leqslant\min(n,m),$$

但 $a'_{i+1}\neq a_{n-i}^{-1}$. 若元素 $a_{n-i}$ 和 $a'_{i+1}$ 属于不同的群 $A_\alpha$，则令

$$ww'=a_1a_2\cdots a_{n-i}a'_{i+1}a'_{i+2}\cdots a'_m;$$

若是 $a_{n-i}$ 和 $a'_{i+1}$ 在同一群 $A_\alpha$ 中且 $a_{n-i}a'_{i+1}=\bar{a}$，则令

$$ww'=a_1a_2\cdots a_{n-i-1}\bar{a}a'_{i+2}\cdots a'_m.$$

换言之，为了得到字 $w$ 和字 $w'$ 的乘积，需要把这两个字依序并写在一起，然后施行必要的消去和合并.

在这样定义的字的乘法中，空字起着单位元的作用. 字(3)的逆元是字

$$w^{-1}=a_n^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

关于字的乘法的结合律的证明，和§18中相应的证明基本上是一样的，从技巧上看是很复杂的. 可以用下面方法绕过这些困难(参看 Van der Waerden[2]).

用 $M$ 表示上面定义的所有字的集合，用 $S_M$ 表示集合 $M$ 到自身上的所有一一映射组成的群. 设 $A_\alpha$ 是给定群中的一个而 $a$ 是 $A_\alpha$ 中异于1的元素. 元素 $a$ 确定集合 $M$ 到自身内的一个映射：若以(3)为表示式的字 $w$ 不以 $A_\alpha$ 中元素结尾，特别若它是空字时，则把 $w$ 映到字

$$wa=a_1a_2\cdots a_na.$$

若是 $a_n\in A_\alpha$，且在 $A_\alpha$ 中 $a_na=a'\neq1$，则把 $w$ 映到字

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}a',$$

最后，若是 $a_n\in A_\alpha$ 而 $a_na=1$，则把 $w$ 映到字

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}.$$

另一方面，若 $a=1$，则规定它对应集合 $M$ 到自身上的恒等映射.

若 $b$ 是 $A_\alpha$ 中任意另一个元素，则显然乘积 $ab$ 所对应的映射就是 $a$ 和 $b$ 所对应的映射在依次执行意义下的乘积. 特别，与 $a$ 和 $a^{-1}$ 对应的映射的依次执行给出恒等映射，因而对应 $A_\alpha$ 中任意元素 $a$ 的映射是集合 $M$ 到自身上的一一映射，亦即是群 $S_M$ 中的元素. 群 $A_\alpha$ 中的不同元素对应着不同的映射，这是因为，与异于 1 的元素 $a$ 对应的映射刚好把空字映到字 $a$.

这样我们得到群 $A_\alpha$ 到群 $S_M$ 的某个子群 $\hat{A}_\alpha$ 上的同构对应；在此对应下元素 $a$ 的象记作 $\hat{a}$. 对所有的 $\alpha$ 都作这样的对应并用 $\hat{G}$ 表示由所有这些子群 $\hat{A}_\alpha$ 在群 $S_M$ 中生成的子群. $\hat{G}$ 中的元素可写成由 $\hat{A}_\alpha$ 中元素组成的字的形式，并且写法是唯一的：若 $w$ 是 $M$ 中某一个字而(3)是它的表示式，则乘积

$$\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_n$$

就是 $M$ 的一个置换，它将空字刚好变到字 $w$. 这就是说，群 $\hat{G}$ 是其子群 $\hat{A}_\alpha$ 的自由积.

在群 $\hat{G}$ 中，乘法完全按照上述字的乘法定义中相同的法则去施行. 因此，所有字的集合 $M$ 是一个群，将它记作 $\bar{G}$. 与同一个群 $A_\alpha$ 的所有元素相对应的、长为 1 的字的全体，与空字合在一起组成群 $\bar{G}$ 的一个子群 $\bar{A}_\alpha$，它同构于群 $A_\alpha$. 上面得到的群 $\bar{G}$ 和 $\hat{G}$ 之间的这个同构对应说明：*群 $\bar{G}$ 是其子群 $\bar{A}_\alpha$ 的自由积，而 $\bar{A}_\alpha$ 同构于给定群 $A_\alpha$.*

现在来说明，自由积的定义也可以用另一种形式给出、即是利用生成元和关系式，也就是用如下的方法给出.

设

$$G^*=\prod_\alpha{}^* A_\alpha$$

*并设群 $A_\alpha$ 是由生成元系 $\mathfrak{M}_\alpha$ 和关于这些生成元的定义关系式系*

$\Phi_\alpha$ 系给定的. 此时所有集合 $\mathfrak{M}_\alpha$ 之并 $\mathfrak{M}$ 将是群 $G$ 的生成元系，而所有集合 $\Phi_\alpha$ 的并 $\Phi$ 将是其定义关系式系. 反之，若群 $G$ 是由生成元系 $\mathfrak{M}$ 和定义关系式系 $\Phi$ 给出的，而 $\mathfrak{M}$ 可划分成一些互不相交的真子系 $\mathfrak{M}_\alpha$, $\Phi$ 可划分成一些互不相交的子系 $\Phi_\alpha$, 并且在 $\Phi_\alpha$ 的每个关系式中出现的只是 $\mathfrak{M}_\alpha$ 中的生成元，则群 $G$ 同构于群 $A_\alpha$ 的自由积，其中 $A_\alpha$ 是具有生成元系 $\mathfrak{M}_\alpha$ 和定义关系式系 $\Phi_\alpha$ 的群.

上面定理的两个论断都可由下面的考虑得出. 设给定互不相交集合 $\mathfrak{M}_\alpha$ 的系而对每一 $\alpha$ 给定一个由 $\mathfrak{M}_\alpha$ 中符号写成的关系式集 $\Phi_\alpha$. 把所有 $\mathfrak{M}_\alpha$ 的并集记作 $\mathfrak{M}$, 所有 $\Phi_\alpha$ 的并集记作 $\Phi$. 此时据 §18 存在一个群 $G$, 以 $\mathfrak{M}$ 为生成元系，以 $\Phi$ 为定义关系式系. 另一方面，用 $\bar{A}_\alpha$ 表示以 $\mathfrak{M}_\alpha$ 为生成元系，$\Phi_\alpha$ 为定义关系式系的群，用 $\bar{G}$ 表示所有群 $\bar{A}_\alpha$ 的自由积

$$\bar{G}=\prod_\alpha{}^*\bar{A}_\alpha.$$

由上述的构造知 $\bar{G}$ 是存在的. 此时群 $\bar{G}$ 的生成元系将是 $\mathfrak{M}$, 但为了得到它的定义关系式系也可能还需对 $\Phi$ 再补充一些关系式. 因此，据 Dyck 定理，群 $\bar{G}$ 同构于群 $G$ 的商群. 如果 $A_\alpha$ 是群 $G$ 中由集合 $\mathfrak{M}_\alpha$ 生成的子群，则在群 $G$ 到 $\bar{G}$ 上的自然同态对应下，子群 $A_\alpha$ 将同态地映到子群 $\bar{A}_\alpha$ 上. 但是，因为 $\bar{A}_\alpha$ 的定义关系式系 $\Phi_\alpha$ 中的所有关系式在 $A_\alpha$ 中也是成立的，所以这个映射就是一个同构对应. 最后，$G$ 中任意元素可表为这些子群 $A_\alpha$ 中元素作成的字(虽然可能并不是唯一的). 此元素在 $G$ 到 $\bar{G}$ 内的同态对应下映到由 $\bar{A}_\alpha$ 中元素作成的相应的字. 但是，因为在 $\bar{G}$ 中，由这些 $\bar{A}_\alpha$ 中元素组成的不同字是群中不同元素，所以这一事实对于 $G$ 中由这些子群 $A_\alpha$ 中元素组成的字也是对的. 这就证明了群 $G$ 和 $\bar{G}$ 是同构的.

还有一种处理自由积概念的方法，即是:

若群$G$由子群$A_\alpha$($\alpha$取遍某一足码集)生成,则$G$是这些子群的自由积,当且仅当对任意群$H$以及这些群$A_\alpha$到群$H$内的任意同态对应$\varphi_\alpha$都存在群$G$到群$H$的同态对应$\varphi$,它在每一子群$A_\alpha$上与$\varphi_\alpha$重合.

这是因为,若

$$G=\prod_{\alpha}{}^{*}A_\alpha$$

且若群$H$以及同态对应$\varphi_\alpha$已给定,则要找的同态对应$\varphi$可如下定义:若

$$w=a_1a_2\cdots a_n$$

是$G$中的字,且$a_i\in A_{\alpha_i}$, $i=1, 2, \cdots, n$,则

$$w\varphi=a_1\varphi_{\alpha_1}\cdot a_2\varphi_{\alpha_2}\cdots a_n\varphi_{\alpha_n}.$$

为了证明逆命题,应取$H$为群$A_\alpha$在上面给出构造的意义下的自由积,而取同态对应$\varphi_\alpha$为群$A_\alpha$到自身上的恒等映射.此时依假设存在的同态$\varphi$实际上就变成了$G$到$H$上的同构对应.

针对每一情况选用上述自由积的几种定义形式中最方便者,读者不难证明自由积的下列简单性质:

**I.** 若$G=\prod_{\alpha}{}^{*}A_\alpha$且若每一$A_\alpha$本身可分解为自由积,$A_\alpha=\prod_{\beta}{}^{*}B_{\alpha\beta}$,则群$G$也是所有$B_{\alpha\beta}$的自由积.群$G$的这个新的自由分解叫作原来自由分解的接续.

**II.** 若给定群$G$的一个自由分解,则如下法可得到$G$的一个新的自由分解:把给定分解中的自由因子集合划分为互不相交的子系并取每一子系内所有因子的乘积.特别,可分解成自由积的任意群都可表成两个群的自由积.

**III.** 若$G=\prod_{\alpha}{}^{*}A_\alpha$且若在每一因子$A_\alpha$中取一子群$A'_\alpha$, $E\subseteq$

$A'_\alpha \subseteq A_\alpha$，则在 $G$ 中所有这些子群 $A'_\alpha$ 生成的子群是这些子群的自由积.

IV. 若 $G=A*B$ 且若 $N$ 是子群 $B$ 在 $G$ 中生成的正规子群，则 $A \simeq G/N$.

这是因为，过渡到关于 $N$ 的商群等价于添加令 $B$ 的所有生成元等于 1 的关系式. 然而这样作了之后保留下来的就仅是群 $A$ 的生成元和定义关系式了.

可分解成自由积的群的一个有趣例子是模群，即是复平面的分式-线性变换群:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{5}$$

其中 $a, b, c, d$ 是整数且行列式 $ad-bc=1$. 变换(5)还可改写成下面形状:

$$z' = \frac{-az-b}{-cz-d},$$

这一点我们以后将要用到. 依次施行分式-线性变换(5)和

$$z'' = \frac{\bar{a}z'+\bar{b}}{\bar{c}z'+\bar{d}} \tag{6}$$

便得变换

$$z'' = \frac{(\bar{a}a+\bar{b}c)z+(\bar{a}b+\bar{b}d)}{(\bar{c}a+\bar{d}c)z+(\bar{c}b+\bar{d}d)}; \tag{7}$$

其诸系数是由变换(6)和(5)的系数依矩阵相乘的规则而得，故其行列式等于 1. 如果我们约定称变换(7)为变换(6)乘变换(5)的乘积，则由于矩阵乘法的结合律，这个乘法也是结合的. 易见，对变换(5)，(6)中之一的改变所有系数的符号，这仅引出变换(7)中系数符号的一个同样改变，这就是说，我们实际上可以谈论复平面上分式-线性变换的乘法.

这个乘法的单位元是恒等变换 $z'=z$. 变换(5)的逆变换是

变换

$$z=\frac{dz'-b}{-cz'+a}.$$

这样，我们所考察的这些分式-线性变换组成群. 这个群将记作$M$，称作模群，它在自守函数论中起着重要作用. 由上述讨论不难得到，群$M$同构于行列式为1的二阶整系数矩阵群关于一个正规子群的商群，而这个正规子群是由单位矩阵和矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

组成；这两个矩阵并且仅有它们对应于恒等变换.

将用$s$表示变换

$$z'=\frac{1}{z},$$

用$t$表示变换

$$z'=z+1.$$

这时有$s^2=1$，而$t^n$是变换$z'=z+n$. 今证，元素$s$，$t$组成群$M$的一个生成元系. 设$v$是群$M$的任意一个元素而(5)是它的表示式，我们先讨论$d=0$的情形. 此时$bc=-1$，这样利用改变变换的系数符号的规则，我们可得$b=-1$，$c=1$，这就是说，$v$是变换

$$z'=\frac{az-1}{z}.$$

现在易证

$$v=t^a s.$$

若是$d\neq 0$，则先设$|b|\geqslant|d|>0$. 由于元素$t^n v$对应于变换

$$z'=\frac{(a+nc)z+(b+nd)}{cz+d},$$

又由于显然可选得$n$使得$|b+nd|<|d|$，故我们可以转到$0\leqslant|b|<|d|$的情形. 若是元素$v$满足这个新的条件，则元素$sv$就该有

形状

$$z' = \frac{-cz-d}{az+b},$$

即是又回到第一种情况，但分母中的自由项已是有较小绝对值的了．用元素 $t$ 的适当幂和用元素 $s$ 从左侧去乘元素 $v$ 若干次后，我们就回到我们曾考虑过的 $d=0$ 的情形．这说明元素 $v$ 具有形式

$$v = s^{\alpha} t^{n_1} s t^{n_2} s \cdots s t^{n_k} s^{\beta},$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 可能是 1 或 0，即是元素 $s$ 和 $t$ 是群 $M$ 的生成元．

若令 $u=ts$，则元素 $s$ 和 $u$ 也组成 $M$ 的生成元系．元素 $u$ 对应于变换

$$z' = \frac{z-1}{z};$$

容易检证 $u^3=1$．现在来证群 $M$ 是循环群 $\{s\}$ 和 $\{u\}$ 的自由积，即 $M=\{s\}*\{u\}$．

任取 $M$ 中不是元素 $s$ 和 $u$ 的幂的元素．由于有 $s^2=u^3=1$，它可表成元素 $s$ 和元素 $u$ 或 $u^2$ 交替出现的乘积形式．假若对于 $M$ 的某个元素这样的表示法不是唯一的，则我们将可得，元素 $s$ 和 $u$ 之间有形如

$$s^{\varepsilon} u^{\alpha_1} s u^{\alpha_2} s \cdots s u^{\alpha_k} s^{\eta} = 1$$

的关系式，其中 $\varepsilon$ 和 $\eta$ 等于 0 或 1，而每个 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 等于 1 或 2．用变形的方法可把此关系式的左侧改写成以元素 $s$ 起头而以元素 $u$ 的幂结尾的形式．因而可限于考虑形如

$$s u^{\alpha_1} s u^{\alpha_2} s \cdots s u^{\alpha_k} = 1 \tag{8}$$

的关系式，其中所有 $\alpha$ 和前面一样取值 1 或 2．然而我们将证明，关系式(8)的左侧实际不可能等于 1．我们对 $k$ 作归纳法来证明这件事，同时我们还将证明，(8)式左侧所对应的分式-线性变换的系

数矩阵具有形状

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中数 $a, b, c, d$ 具有相同的符号，这里我们约定零可以认为是具正号，也可是具负号的．事实上，元素 $su$ 对应矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

元素 $su^2$ 对应矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

即对 $k=1$ 的情形上述命题已得证．设对 $k$ 已证得它，而令元素

$$su^{\alpha_1}su^{\alpha_2}\cdots su^{\alpha_k} \tag{10}$$

对应矩阵(9)．若用元素 $su$ 从右侧去乘此元素，则我们得矩阵

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a-b & b \\ c+d & -d \end{pmatrix},$$

它满足我们的条件，这里元素 $c+d$ 异于零，因为数 $c$ 和 $d$ 同号且至少有一个不为零．用 $su^2$ 去乘元素(10)将得同样的结果．这就证明了下述命题．

模群可分解成两个有限循环群的自由积：一个是二阶的，一个是三阶的．

## §34. 自由积的子群

下面关于自由积的子群定理是自由积理论中的一个基本定理．它在 Курош [3] 中被证明了且在 Baer 和 Levi [2] 以及 Takahasi [1][1] 中被再证过．

---

1) 在准备第三版时已发表了一系列其他证明(参看补充 7.1．不拟出中译本)．

若

$$G=\prod_{\alpha}{}^{*}A_{\alpha} \tag{1}$$

而$H$是群$G$的任一子群,则群$H$有自由分解

$$H=F*\prod_{\beta}{}^{*}B_{\beta},$$

其中$F$是自由群,而任一$B_{\beta}$在$G$中共轭于某个自由因子$A_{\alpha}$的一个子群。

**证明**. 在本节中我们约定,一个给定元素的长它的最简表示式等等都是指关于群$G$的自由分解(1)来说的. 其次我们还要引入下面一些定义.

若$G$的元素$g$之长为偶数,$l(g)=2k$,即是

$$g=a_{-k}\cdots a_{-1}a_{1}\cdots a_{k}$$

则字$a_{-k}\cdots a_{-1}$将叫作元素$g$的左半,字$a_{1}\cdots a_{k}$叫作其右半. 若是$l(g)=2k+1$,即是

$$g=a_{-k}\cdots a_{-1}a_{0}a_{1}\cdots a_{k},$$

则字$a_{-k}\cdots a_{-1}$将叫作元素$g$的左半,$a_{1}\cdots a_{k}$为其右半而$a_{0}$为其中心元. 若是此时左半和右半互逆,即$a_{-i}=a_{i}^{-1}$, $i=1, 2, \cdots, k$,则称元素$g$为变形元. 变形元与自己的中心元共轭,并有相同的阶. $G$中不是变形元的元素的阶都是无限的.

今用下述方法定义群$H$的子群$\Phi_{\mu}$($\mu$是序数). 设$\Phi_{0}=E$. 若对小于某一$\nu$的所有$\mu$,子群$\Phi_{\mu}$已经定义好了,且若$K_{\nu}$是所有这些$\Phi_{\mu}$生成的子群,则设$l_{\nu}$为$H$中不在$K_{\nu}$内的元素的最小长. 若在这样一些长为$l_{\nu}$的元素中有变形元,则选取其中的一个,$g_{\nu}^{-1}ag_{\nu}$,其中$a\in A_{\alpha_{\nu}}$而元素$g_{\nu}$的最简表示式中第一个元素不属于$A_{\alpha_{\nu}}$并记

$$\bar{A}_\nu = H \cap g_\nu^{-1} A_{\alpha_\nu} g_\nu.$$

特别，当 $l_\nu = 1$ 时，我们所选取的变形元就是某一 $A_{\alpha_\nu}$ 中的一个元素 $a$，因此，此时

$$\bar{A}_\nu = H \cap A_{\alpha_\nu}.$$

若是$H$中不属于 $K_\nu$ 的元素里没有长为 $l_\nu$ 的变形元，我们便令 $\bar{A}_\nu = E$. 易见当 $l_\nu$ 为偶数时就是这种情形.

其次，在$H$内但在子群$\{K_\nu, \bar{A}_\nu\}$之外，我们选一元素 $f_{\nu 1}$，它的右半是 $g_\nu$ 而中心元属于 $A_{\alpha\nu}$，假如这种元素存在的话. 若是 $\bar{A}_\nu = E$，则 $f_{\nu 1}$ 可取在$H$内 $K_\nu$ 外的长为 $l_\nu$ 的任意一个元素；此时把它的右半记作 $g_\nu$ 而把其中心元(当 $l_\nu$ 为奇数时)所在的自由因子 $A_\alpha$ 记作$A_{\alpha_\nu}$. 若是对所有序数 $\delta, \delta < \sigma$ 已选定 $f_{\nu\delta}$，且若在$H$内，而在由子群 $K_\nu, \bar{A}_\nu$ 与所有元素 $f_{\nu\delta}$，$\delta < \sigma$ 生成的子群外，还有以 $g_\nu$ 为右半以 $A_{\alpha_\nu}$ 中的元素为中心元且长为 $l_\nu$ 的元素，则取其一并记作 $f_{\nu\sigma}$. 这一过程在某一序数 $\sigma_\nu$ 处停下来. 此时我们把群$H$中由子群 $\bar{A}_\nu$ 以及所有元素 $f_{\nu\delta}$，$\delta < \sigma_\nu$ 生成的子群记作 $\Phi_\nu$. 这时显然该令 $K_{\nu+1} = \{K_\nu, \Phi_\nu\}$，而当 $\lambda$ 为极限序数时，$K_\lambda$ 是子群 $K_\nu, \nu < \lambda$ 组成的递升链的并. 构造子群 $\Phi_\mu$ 和 $K_\mu$ 的过程在序数 $\tau$ 处停下来，这里的 $\tau$ 具有性质 $K_\tau = H$.

约定把元素 $f_{\mu\delta}, \delta < \sigma_\mu$，元素 $f_{\mu\delta}^{-1}$ 以及 $\bar{A}_\mu$ 中除 1 外的所有元素叫作子群 $\Phi_\mu$ 的生成元. 认定所有子群 $\Phi_\mu$，$\mu < \nu$，的生成元为子群 $K_\nu$ 的生成元. 下面在谈到关于子群 $\Phi_\mu$ 和 $K_\nu$ 的生成元时，都在这种特殊的意义下去理解的.

设 $U$ 或者是某个子群 $\Phi_\mu$，或者是某个子群 $K_\nu$. 其生成元将记作 $u_1, u_2, \cdots$. 乘积 $u_1 u_2 \cdots u_k$ 将称作 $U$ 中的字，如果相邻的因子 $u_i, u_{i+1}$ 不互为逆元并且不属于同一个子群 $\bar{A}_\mu$ 中. 在谈到字的长时，我们永远指的是它在群$G$的自由分解中的最简表示式的长. 特别，字 $u_1 u_2 \cdots u_k$ 将被叫作单纯的，如果它的长等于其因子 $u_i$ 的长

中之最大者[1]。$U$ 中单纯字将记作 $u'$, $u''$, …. 最后, 我们约定: 在字 $u'$ 和 $u''$ 的乘积 $u'u''$ 中这两个字间有一类,二类或者三类相邻关系,如果乘积 $u'u''$ 的长度大于, 等于或者小于字 $u'$ 和 $u''$ 之长度的最大者.

现转来证明下面结论:

*子群 $\Phi_\mu$ 是子群 $\bar{A}_\mu$ 和由元素 $f_{\mu\sigma}$, $\sigma<\sigma_\mu$, 生成的无限循环群的自由积.*

显然, 这个结论等价于 $\Phi_\mu$ 的任意非空字(在上面规定的特殊意义下)异于群 $G$ 的单位元, 亦即关于分解(1)具有非空的最简表示式. 先证一个引理:

**引理 1.** *两个任意元素 $f_{\mu\sigma_1}$ 和 $f_{\mu\sigma_2}$, $\sigma_1<\sigma_2$, 具有不同的左半.*

当 $l_\mu$ 是偶数时这是显然的, 因为这些给定元素的右半等于 $g_\mu$, 即彼此相等的. 若 $l_\mu$ 是奇数, 则当元素 $f_{\mu\sigma_1}$ 和 $f_{\mu\sigma_2}$ 的左半相等时, 元素 $f_{\mu\sigma_1}^{-1}f_{\mu\sigma_2}$ 就该属于子群 $\bar{A}_\mu$, 亦即元素 $f_{\mu\sigma_2}$ 落在由子群 $\bar{A}_\mu$ 和元素 $f_{\mu\sigma_1}$ 共同生成的子群中, 这是和元素 $f_{\mu\sigma}$ 的选择相矛盾的.

现在约定把子群 $\Phi_\mu$ 的生成元表作 $v_1$, $v_2$, …, 把单纯字表作 $v'$, $v''$, …. 以下各字都是单纯字:

1) 由一个因子 $v_1$ 组成的任意字.

2) 任意形如 $v_1v_2$ 的字, 但要求元素 $v_1$ 的右半是 $g_\mu$ 而元素 $v_2$ 的左半是 $g_\mu^{-1}$. 实际上, 若是有 $l(v_1v_2)<l_\mu$, 则 $v_1v_2\in K_\mu$, 亦即元素 $v_1$, $v_2$ 中之一必落在另一个元素和子群 $K_\mu$ 所生成的子群中, 但这对其中一个元素是不能成立的.

3) 任意形如 $v_1v_2v_3$ 的字, 其中 $v_2\in\bar{A}_\mu$, $v_1$ 是某个元素 $f_{\mu\sigma_1}$, $v_3$ 是某个元素 $f_{\mu\sigma_2}^{-1}$, 并且足码 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 可以是不同的也可以是相同的.

---

1) 即是等于 $l_\mu$, 如果 $U=\Phi_\mu$.

情形 1)—3)穷尽了子群 $\Phi_\mu$ 中的所有单纯字，这可以从下面结果看出.

若 $v_1v_2\cdots v_n$ 是 $\Phi_\mu$ 中的一个字，则可把其因子适当地合并在一起

$$v_1v_2\cdots v_n=(v_1\cdots v_{i_1})(v_{i_1+1}\cdots v_{i_2})\cdots(v_{i_{k-1}+1}\cdots v_n)$$

使得任意字 $v_{i_s+1}\cdots v_{i_{s+1}}$ 是形如 1)—3) 中之一的单纯字

$$v_1v_2\cdots v_n=v'v''\cdots v^{(k)}$$

并在任两个相邻的单纯字 $v^{(s)}$ 和 $v^{(s+1)}$ 之间有第一类相邻关系.

当 $n=1$ 时这个定理是对的. 如果它对 $n-1$ 已得到证明，则有

$$v_1v_2\cdots v_{n-1}=v'v''\cdots v^{(s)}.$$

字 $v^{(s)}$ 是形如 1)—3) 之一的单纯字，因而它的右半等于元素 $v_{n-1}$ 的右半. 如果这个右半等于 $g_\mu$，而元素 $v_n$ 的左半为 $g_\mu^{-1}$，则乘积 $v^{(s)}v_n$ 将是形如 2) 或 3) 的单纯字. 在所有其他情形，根据引理 1 以及元素 $f_{\mu\sigma}$ 的定义，在 $v^{(s)}$ 和 $v_n$ 之间将是第一类相邻关系，即是元素 $v_n$ 可以取作新的单纯字.

由此定理可得，$\Phi_\mu$ 中任意非空字关于分解(1)有非空的最简表示式，亦即可得出上面关于子群 $\Phi_\mu$ 所述结论.

转来研究子群 $K_\nu$，先来证明下面结论.

子群 $K_\nu$ 是所有异于 $E$ 的子群 $\bar{A}_\mu$, $\mu<\nu$，以及所有由元素 $f_{\mu\sigma}$, $\sigma<\sigma_\mu$, $\mu<\nu$，生成的无限循环群的自由积.

这个结论可由下面定理直接得出（这里 $u_1, u_2, \cdots$ 表示子群 $K_\nu$ 的生成元，$u', u'', \cdots$ 表示 $K_\nu$ 的单纯字）.

(A) 若给定 $K_\nu$ 中的一个乘积 $u_1u_2\cdots u_n$，则其因子可以适当地合并：

$$u_1u_2\cdots u_n=(u_1\cdots u_{i_1})(u_{i_1+1}\cdots u_{i_2})\cdots(u_{i_{k-1}+1}\cdots u_n),$$

使得任意字 $u_{i_s+1}\cdots u_{i_{s+1}}$ 是单纯字，即

$$u_1u_2\cdots u_n=u'u''\cdots u^{(k)},$$

并且在任意两个相邻单纯字 $u^{(s)}$, $u^{(s+1)}$之间有第一类相邻关系.

实际上，由(A)容易得出，$K_\nu$中任意非单纯字的长度大于其每一个因子的长度，即是 $K_\nu$ 中任意非空字具有非空的最简表示式.

定理(A)可用关于 $\nu$ 的归纳法来证，并且对 $K_1=E$ 它是显然的，而对 $K_2=\Phi_1$ 上面已经证过了. 当 $\nu$ 是极限序数时，这个定理是正确的，这只要注意到在此种情形 $K_\nu$ 中的任意字都已是某个子群 $K_\mu$, $\mu<\nu$, 中的字. 因此剩下该作的是，假定定理(A)对某个子群 $K_\nu$ 为真而来证它对子群 $K_{\nu+1}$ 也真.

**引理 2.** 若 $u_1u_2\cdots u_k$ 是 $K_\nu$ 中的单纯字，则它的任意截段 $u_1u_2\cdots u_s$, $s\leqslant k$(以及截段 $u_t\cdots u_k$, $t\geqslant 1$)也是单纯字.

若给定单纯字的某些截段（例如说是由头开始的）不是单纯的，则存在有 $s$, $s<k$, 使得字 $u_1\cdots u_s$ 不是单纯的，但 $u_1\cdots u_su_{s+1}$ 已是单纯的了. 依(A)有

$$u_1\cdots u_s=u'\cdots u^{(r)},\quad r>1.$$

在这种情形字 $u_1\cdots u_s$ 的长度大于每一个因子的长度，即是大于每一个单纯字 $u'$, $\cdots$, $u^{(r)}$的长度. 如果在单纯字 $u^{(r)}$和 $u_{s+1}$ 之间是第一类或第二类相邻关系，则字 $u_1\cdots u_su_{s+1}$ 的长度也大于其每一个因子的长度，这是和此字的单纯性相矛盾的. 如果在 $u^{(r)}$和 $u_{s+1}$ 之间是第三类相邻关系，则乘积 $u^{(r)}u_{s+1}$ 是一个字且其长度小于它的一个因子的长度，而这和定理(A)是矛盾的.

**引理 3.** $K_\nu$ 中单纯字 $u_1\cdots u_k$ 的最简表示式中元素 $u_1$ 的左半和元素 $u_k$ 的右半被完全保留下来了，而这些元素的中心元(在奇数长度的情形）最多只能由同一自由因子中异于单位元的元素来代替.

实际上，因为字 $u_1\cdots u_{k-1}$ 依引理 2 是单纯的，亦即其长度等于其因子的最大长度，又因为字 $u_1\cdots u_k$ 也具有这样性质，故在单纯

字 $u_1\cdots u_{k-1}$ 和 $u_k$ 之间应当有第二类相邻关系. 由此得,化简将不会触及元素 $u_k$ 的右半, 而其中心元只可能受到合并. 对元素 $u_1$ 的情形可对称地去考虑.

**引理 4.** *$K_\nu$ 中任意字 $w$, 如果其最简表示式是变形元的形式,则此字具有形状*

$$w=u_n^{-1}\cdots u_1^{-1}u_0u_1\cdots u_n,$$

*其中 $u_0$ 是变形元,即是属于某个子群 $\bar{A}_\mu$, $\mu<\nu$, 中.*

设 $w=u_1u_2\cdots u_k$. 若是 $u_1=u_k^{-1}$,则我们可以转来讨论字

$$u_1^{-1}wu_1=u_2\cdots u_{k-1},$$

它的最简表示式仍是变形元形式. 若是元素 $u_1$ 和 $u_k$ 属于同一个子群 $\bar{A}_\mu$, $\mu<\nu$, 内,则我们可以考虑字

$$u_1^{-1}wu_1=u_2\cdots u_{k-1}(u_ku_1).$$

因此, 我们可假定元素 $u_1$ 和 $u_k$ 不是相逆的且不属于同一个子群 $\bar{A}_\mu$ 中. 我们只要在此情况下能证明必有 $k=1$,那末引理也就证明了.

设 $k>1$. 如果字 $w$ 不是单纯的, 则依(A)它可分解成单纯字的乘积

$$w=u'u''\cdots u^{(r)},\quad r>1,$$

并且这些单纯字之间有第一类相邻关系. 但是, 因为字 $w$ 的最简表示式有变形元形式,即是其左半是右半之逆, 故在把乘积 $u^{(r)}u'$ 化简成字时, 相消的项很多, 而得这两个因子处于第三类相邻关系. 这样,字 $u^{(r)}u'$ 之长度将小于其中一个因子的长度,但这是和定理(A)相矛盾的.

现在设 $w$ 是单纯字. 这样,存在有一个因子 $u_i$, 使得 $l(w)=l(u_i)$,并且对所有 $j\neq i$, $l(u_i)\geqslant l(u_j)$. 我们将假定 $u_i$ 不是诸元素 $f_{\mu\sigma}^{-1}$, $\mu<\nu$, 中的一个, 因为不然的话, 我们可以去考虑字 $w^{-1}$. 其次,我们还假定 $i=k$,因为当 $i<k$ 时我们可以去考虑字

$$u_{i+1}\cdots u_k w u_k^{-1}\cdots u_{i+1}^{-1}=u_{i+1}\cdots u_k u_1\cdots u_i,$$

其最简表示式仍是变形元形式；而由上面作过的一些讨论知，此新字可以认定是单纯的.

若 $u_k\in\Phi_\mu$，即是元素 $u_k$ 的右半是 $g_\mu$ 而中心元属于 $A_{\alpha_\mu}$，则由引理 3 元素 $w$ 的右半也是 $g_\mu$，而中心元也在 $A_{\alpha_\mu}$ 中. 但是，由于元素 $w$ 的最简表示式是变形元形式，故其左半等于 $g_\mu^{-1}$. 若子群 $\bar{A}_\mu\neq E$，则 $w\in\bar{A}_\mu$. 因为

$$u_1\cdots u_k w^{-1}=1,$$

又因为在左侧当 $u_k\notin\bar{A}_\mu$ 时是一个字，而当 $u_k\in\bar{A}_\mu$ 时合并因子 $u_k$ 和 $w^{-1}$ 之后便是个字，故条件 $k>1$ 显然必引到和定理(A)相矛盾. 若是 $\bar{A}_\mu=E$，则字 $w$ 已在某个子群 $K_\lambda$，$(\lambda<\mu)$中，即是可以通过此群的生成元来表示

$$w=u_1'u_2'\cdots u_m'.$$

在这种情况我们得到等式

$$u_1\cdots u_k u_m'^{-1}\cdots u_1'^{-1}=1,$$

这又是不可能的，因为在等式的左侧是子群 $K_\nu$ 中的一个字.

**引理 5.** $K_\nu\cap\bar{A}_\nu=E$.

实际上，由子群 $\bar{A}_\nu$ 的定义知，在 $\bar{A}_\nu$ 中存在一个异于 1 的元素 $w$，它不属于 $K_\nu$. 今假设存在一个异于 1 的元素 $w'$，它既属于 $\bar{A}_\nu$ 又属于 $K_\nu$. 由 $w'\in K_\nu$ 以及引理 4 得

$$w'=u_n^{-1}\cdots u_1^{-1}u_0u_1\cdots u_n,$$

其中 $u_0\in\bar{A}_\mu$，$\mu<\nu$. 元素 $w$ 和 $w'$ 的最简表示式之间的区别仅在于它们的中心元是同一子群 $A_\alpha$ 中的不同元素. 由之得元素 $u_1\cdots u_n wu_n^{-1}\cdots u_1^{-1}$ 应在子群 $\bar{A}_\mu$ 中，但此时 $w\in K_\nu$，因为所有元素 $u_i$，$i=1,2,\cdots,n$，明显地都是属于$K_\nu$ 的.

现在我们转来为对于子群 $K_{\nu+1}$ 证明定理(A)作准备. 以下各处都用 $u_1,u_2,\cdots$表示子群 $K_\nu$ 的生成元，用 $u',u'',\cdots$表示此子群

的单纯字，而用$v_1, v_2, \cdots$以及$v', v'', \cdots$相应地表示子群$\Phi_\nu$的生成元和单纯字. 这里指出，由子群$\Phi_\mu$的构成及单纯字的定义得对任意$u'$和$v'$有不等式$l(u') \leqslant l(v')$，亦即有不等式$l(u') \leqslant l_\nu$.

**引理 6.** *若$l(u') < l(v')$，则在单纯字$u'$和$v'$之间不可能有第三类相邻关系.*

实际上，若是例如在乘积$u'v'$中其因子间有第三类相邻关系且若$v' = v_1 \cdots v_k$[1]，则乘积$u'v_1$的长度就已小于$l_\nu$，即有$u'v_1 \in K_\nu$，由之$v_1 \in K_\nu$. 但这最后一个是不可能的，当$v_1 \in \bar{A}_\nu$时是由于引理5，而当$v_1$是某个$f_{\nu\sigma}$或是它的逆元时是由于元素$f_{\mu\sigma}$的定义.

**引理 7.** *若$\mu < \nu$且若子群$H$中元素$h$的左半等于某个元素$f_{\mu\sigma}$的左半，而元素$h$的中心元(当$l_\mu$是奇数时)属于$A_{\alpha_\mu}$，则$h$含在子群$K_{\mu+1}$中，因而也在子群$K_\nu$中.*

实际上，$l(h^{-1}f_{\mu\sigma}) \leqslant l_\mu$. 若事实上有严格不等式，则$h^{-1}f_{\mu\sigma} \in K_\mu$，因而$h \in K_{\mu+1}$. 若是$l(h^{-1}f_{\mu\sigma}) = l_\mu$，则元素$h^{-1}f_{\mu\sigma}$的右半等于$g_\mu$，而其中心元在$A_{\alpha_\mu}$中. 所有这种元素都属于$K_{\mu+1}$，因此$h^{-1}f_{\mu\sigma} \in K_{\mu+1}$，亦即还是$h \in K_{\mu+1}$.

**引理 8.** *若$l(u') = l(v')$，则在单纯字$u'$和$v'$之间只可能是第一类相邻关系.*

设$u' = u_1u_2 \cdots u_s$，$v' = v_1 \cdots v_k$并设在乘积$u'v'$中其因子间有第二类或第三类相邻关系. 这时在$u'$和$v_1$之间也有第二或甚至是第三类相邻关系. 若$l(u_j) = l(u') = l_\nu$，但当$j < s$时对$j < i \leqslant s$有$l(u_i) < l_\nu$，则在字$u_{j+1} \cdots u_s$和字$v_1$之间将是第二类相邻关系，亦即$l(u_{j+1} \cdots u_s v_1) = l_\nu$. 实际上，引理6排除掉第三类相邻关系，因为字$u_{j+1} \cdots u_s$依引理2是单纯的，因而$l(u_{j+1} \cdots u_s) < l_\nu$；至于第一类相邻关系，它将导出来字$u'$和$v_1$间的第一类相邻关系.

---

1）由于上面关于子群$\Phi_\nu$的单纯字的证明可知$k \leqslant 3$.

依引理 3, 单纯字 $u_1\cdots u_j$ 的右半等于元素 $u_j$ 的右半, 而此字的中心元和元素 $u_j$ 的中心元属于同一个自由因子 $A_\alpha$. 因为在字 $u_1\cdots u_j$ 和$u_{j+1}\cdots u_s v_1$ 之间必定有第二类或第三类相邻关系, 又因为它们的长度相等, 故字 $u_{j+1}\cdots u_s v_1$ 的左半是元素$u_j$ 的右半之逆元, 而它们的中心元属于同一个自由因子. 但是, 由之, 当 $u_j$ 在 $\bar{A}_\mu$ 中或者等于某个元素 $f_{\mu\sigma}$, $\mu<\nu$, 时利用子群 $\Phi_\mu$ 的定义, 或者当 $u_j$ 等于某个 $f_{\mu\sigma}^{-1}$ 时利用引理 7, 总可得到

$$u_{j+1}\cdots u_s v_1\in K_\nu,$$

由之有 $v_1\in K_\nu$, 而这是不可能的.

可类似地讨论乘积 $v'u'$ 的情形.

**引理 9.** *若 $l(u')<l_\nu$ 而在乘积 $v'u'$ 和 $u'v''$ 中在其因子间有第二类相邻关系, 则在 $v'u'$ 和 $v''$ 间只可能是第一类相邻关系.*

若 $v'=v_{11}\cdots v_{1s}$, $v''=v_{21}\cdots v_{2t}$ 且若在 $v'u'$ 和 $v''$ 间有第二类或第三类相邻关系, 则在 $v_{1s}u'$ 和 $v_{21}$ 之间(以及 $v_{1s}$ 和 $u'v_{21}$ 之间) 也有第二或第三类相邻关系. 但是, 当元素 $v_{1s}$ 的右半等于 $g_\nu$ 而元素 $v_{21}$ 的左半等于 $g_\nu^{-1}$ 时, 这是不可能的, 因为此时相约不能消灭整个字 $u'$.

今设元素 $v_{21}$ 的左半等于 $g_\nu^{-1}$, 而元素 $v_{1s}$ 的右半异于 $g_\nu$; 这时元素 $v_{1s}$ 的左半必定等于 $g_\nu^{-1}$. 因为在 $v_{1s}u'$ 和 $v_{21}$ 之间依假设有第二或第三类相邻关系, 故元素 $v_{1s}u'$ 的右半将等于 $g_\nu$, 亦即有 $v_{1s}u'\in\bar{A}_\nu$. 然而由之将有 $v_{1s}\in\{K_\nu, \bar{A}_\nu\}$, 而这是和元素 $f_{\nu\sigma}$ 的定义相矛盾的.

对于元素 $v_{1s}$ 的右半等于 $g_\nu$, 而元素 $v_{21}$ 的左半异于 $g_\nu^{-1}$ 的情形可以类似地去讨论.

最后, 设元素 $v_{1s}$ 的右半异于 $g_\nu$, 而元素 $v_{21}$ 的左半异于 $g_\nu^{-1}$. 在我们关于 $v_{1s}u'$ 和 $v_{21}$ 的相邻关系的假设下这时我们有, 乘积 $v_{1s}u'v_{21}$ 或者是属于$\bar{A}_\nu$的变形元, 或者等于 1. 在这两种情况下$v_{1s}$

和 $v_{21}$ 这两个元素之一必含在由子群 $K_{\nu}$, $\bar{A}_{\nu}$ 以及另一个元素所生成的子群中. 但是, 因为元素 $v_{1s}$ 既异于 $v_{21}$ 也异于 $v_{21}^{-1}$——在乘积 $v_{1s}u'v_{21}$ 中的相约必定把字 $u'$ 完全消灭掉——故我们引到和元素 $f_{\nu\sigma}$ 的定义相矛盾. 引理 9 证完.

现在对子群 $K_{\nu+1}$ 来证明定理(A)就没有什么困难了. 我们甚至是来证明: $K_{\nu+1}$ 中的任意字是形如 1) $u'$, 2) $v'$, 3) $u'v'$, 4) $v'u'$ 和 5) $u'v'u''$ 中之一的一些单纯字的乘积, 并且在这些单纯字之间有第一类相邻关系

实际上, 若给定 $K_{\nu+1}$ 中的一个字 $w$, 则把其中相邻的 $K_{\nu}$ 中的元素, 以及相邻的 $\Phi_{\nu}$ 中的元素合并起来, 便可将此字表成由 $K_{\nu}$ 中的字和由 $\Phi_{\nu}$ 中的字交替出现的乘积. 而对这些字中的每一个, 对属于 $K_{\nu}$ 者利用归纳假设, 对属于 $\Phi_{\nu}$ 者利用上面证过的结果, 都可表成单纯字的乘积, 且在这些单纯字之间有第一类相邻关系. 引理 6, 8 和 9 说明, 一个在 $K_{\nu}$ 中一个在 $\Phi_{\nu}$ 中的两个相邻的单纯字合并一起时是一个单纯字; 在引理 9 中所讨论的情况下, 字 $u'$ 可以随意地或者与 $v'$ 合并, 或者与 $v''$ 合并. 这样我们得到, 字 $w$ 确可写成形如 1)—5) 的单纯字的乘积形式, 并且在这些单纯字之间有第一类相邻关系.

这样, 对所有的子群 $K_{\nu}$, 定理(A)是成立的, 因而对等于 $K_{\tau}$ 的子群 $H$ 它也是对的. 换言之, 子群 $H$ 是所有异于 $E$ 的子群 $\bar{A}_{\nu}$, $\nu<\tau$——这些子群依它们的定义与自由因子 $A_{\alpha}$ 的子群共轭——以及所有无限循环子群 $\{f_{\nu\sigma}\}$, $\sigma<\sigma_{\nu}$, $\nu<\tau$ 的自由积.

关于自由积子群的定理现在证完了.

这里指出, 我们所得到的对于 $H$ 的自由分解具有下面性质: 若 $g$ 是 $G$ 中任意元素, $A_{\alpha}$ 是群 $G$ 的已给分解的一个任意自由因子且若交集 $D=H\cap g^{-1}A_{\alpha}g$ 异于 $E$, 则在我们对 $H$ 给出的分解中可找到一个自由因子, 它与 $D$ 在 $H$ 内共轭. 实际上, 若 $d$ 是 $D$ 中异于 1

的元素，则 $d=g^{-1}a_\alpha g, a_\alpha\in A_\alpha$. 应用本节的引理4可知，元素 $d$ 在 $H$ 内与某一个子群 $\bar{A}_\mu$ 的一个元素共轭，亦即

$$d=g^{-1}a_\alpha g\in h^{-1}\bar{A}_\mu h, \text{其中 } h\in H.$$

但由 $\bar{A}_\mu\subseteq g_\mu^{-1}A_{\alpha_\mu}g_\mu$ 可得

$$d\in(g_\mu h)^{-1}A_{\alpha_\mu}(g_\mu h),$$

由之有

$$a_\alpha\in(g_\mu hg^{-1})^{-1}A_{\alpha_\mu}(g_\mu hg^{-1}).$$

从而得 $\alpha=\alpha_\mu$ 而 $g_\mu hg^{-1}=a'_{\alpha_\mu}\in A_{\alpha_\mu}$, 亦即, $g=a'^{-1}_{\alpha_\mu}g_\mu h$. 此时有

$$\begin{aligned}D=H\cap g^{-1}A_\alpha g&=H\cap(a'^{-1}_{\alpha_\mu}g_\mu h)^{-1}A_{\alpha_\mu}(a'^{-1}_{\alpha_\mu}g_\mu h)\\&=h^{-1}(H\cap g_\mu^{-1}A_{\alpha_\mu}g_\mu)h=h^{-1}\bar{A}_\mu h,\end{aligned}$$

这就证明了我们的结论.

## §35. 自由分解的同构. 具相重子群的自由积

群 $G$ 的两个自由分解

$$G=F_1*\prod_\alpha{}^*A_\alpha=F_2*\prod_\beta{}^*B_\beta$$

叫作同构的，如果 $F_1$ 和 $F_2$ 是同构的自由群，而在因子 $A_\alpha$ 和 $B_\beta$ 之间可建立一个相互单值对应，使得相对应的因子在群 $G$ 中共轭. 这时，利用在 §33 中引入的群的自由积的接续概念，可以证明下面定理(参看 Курош[2], [3], Baer, Levi[2]):

*任意群的两个任意自由分解具有同构的接续.*

事实上，设

$$G=\prod_\alpha{}^*A_\alpha=\prod_\beta{}^*B_\beta. \tag{1}$$

设

$$A_\alpha=F_\alpha*\prod_\gamma{}^*A_{\alpha\gamma} \tag{2}$$

是子群 $A_\alpha$ 的自由分解，它是应用上一节所给出的构造方法利用(1)中第二个分解而得到的，并设

$$B_\beta = F'_\beta * \prod_\delta {}^* B_{\beta\delta} \tag{3}$$

是对 $B_\beta$ 利用(1)第一个分解所得到的类似分解，则子群

$$B_{\beta\delta} = B_\beta \cap g^{-1} A_\alpha g$$

与交 $gB_\beta g^{-1} \cap A_\alpha$ 共轭．但，注意到上节末所作的注记，知此交和某个子群 $A_{\alpha\gamma}$ 共轭．这样，对任意子群 $B_{\beta\delta}$ 可找到与之在 $G$ 中共轭的子群 $A_{\alpha\gamma}$.

现在我们把(1)中的所有的 $A_\alpha$ 和 $B_\beta$ 换成它们的分解式(2)和(3)便得到(1)中分解的接续：

$$G = \prod_\alpha {}^* F_\alpha * \prod_{\alpha,\gamma} {}^* A_{\alpha\gamma} = \prod_\beta {}^* F'_\beta * \prod_{\beta,\delta} {}^* B_{\beta\delta}. \tag{4}$$

这里指出，两个不同的子群 $A_{\alpha\gamma}$ 和 $A_{\alpha'\gamma'}$ 不可能在 $G$ 中共轭，因为它们作为自由因子出现在群 $G$ 的一个自由分解中．因此，任一个子群 $B_{\beta\delta}$ 仅能和一个且只有一个子群 $A_{\alpha\gamma}$ 共轭；另一方面，任意子群 $A_{\alpha\gamma}$ 共轭于子群 $B_{\beta\delta}$ 中的一个．这样，在所有子群 $A_{\alpha\gamma}$ 和所有子群 $B_{\beta\delta}$ 间可建立一个相互单值对应，使得相对应的子群在 $G$ 中共轭．这时，子群 $\prod_{\alpha,\gamma}{}^* A_{\alpha\gamma}$ 和 $\prod_{\beta,\delta}{}^* B_{\beta\delta}$ 在群 $G$ 中生成同一个正规子群，因而由 § 33 中性质 IV 知自由群 $\prod_\alpha {}^* F_\alpha$ 和 $\prod_\beta {}^* F'_\beta$ 是同构的．(4)中分解的同构关系得证．

在本章中说一个群是不可分解的，如果它不能分解成其真子群的自由积．由刚才证明的定理可直接得到下面结论：

*若群 $G$ 具有不可分解因子的自由分解，则此群的任意两个这*

样的分解必同构，而它的任意一个自由分解可以接续成有不可分解因子的分解.

这里指出，由于我们对任意群已经证明了同构接续的存在性定理，这样，最后的这个结果实际上是涉及某个特殊的群类——存在着一些群，虽然它们可分解成自由积，但却不能分解成有不可分解因子的自由积.（参看 Курош[8]）.

在两个自由分解同构的定义中包含有关于某两个自由群同构的要求. 这就产生一个问题：在什么条件下两个自由群同构？由于自由群完全由其秩来确定，亦即由其自由生成元之个数(势)确定，故问题显然归结为，不同秩的两个自由群是否能同构？下面定理(Schreier[4])给出此问题的答案.

*自由群的秩是它的不变量，亦即不依赖于生成元系的选择.*

此定理指明，当两个自由群同构时它们的秩必相等，因为在其中一个群到另一个群的同构对应下，第一个群的给定自由生成元之象组成第二个群的自由生成元系.

为了证明定理，取自由群$W$关于其换位子群$K$的商群. 因为转到关于换位子群的商群上去等价于假设所有生成元之间彼此可换，故商群$W/K$是自由阿贝尔群，而关于$K$的陪集，其中含有群$W$的给定自由生成元组中之元素者，组成此自由阿贝尔群的基. 这时由 §19 中证明的阿贝尔群秩的不变性可得群$W$的秩的不变性.

关于自由积的子群定理是可以应用到自由群，亦即无限循环群的自由积上的，这时就引出下面定理.

**Nielsen-Schreier 定理.** *自由群的异于$E$的子群本身也是自由群.*

实际上，任意一个子群，若它在某个群内和无限循环群共轭，则本身也是无限循环群.

我们将在下一节中再回到这个定理上来，而现在我们还要指

出关于自由积的子群定理的一个应用，即来证明下面定理（Baer和Levi[2]）：

任意一个群都不能同时既可分解成自由积又可分解成直积.

事实上，设

$$G=A*B=C\times D,$$

其中子群 $A, B, C$ 和 $D$ 异于单位子群. 因为一个自由因子中异于1的元素不能和群中不在此自由因子中的元素可换，故由 $A\cap C\neq E$ 以及 $C$ 和 $D$ 中元素可换将有 $A\supset D$, 而这时也有 $A\supset C$, 即得 $A=G$, 而这是不可能的. 因此 $A\cap C=A\cap D=E$. 相应地有 $B\cap C=B\cap D=E$. 由于 $C$ 是群 $G$ 的正规子群，故 $C$ 与共轭于 $A$ 或 $B$ 的子群之交也等于 $E$. 现在对 $C$ 应用关于自由积的子群定理，我们便得 $C$ 是自由群. 这个对 $D$ 也是对的. 其次，由 $A\cap D=E$ 得，子群 $A$ 在直分解 $G=C\times D$ 的因子 $C$ 中的分支（参看 § 17）同构子群 $A$ 本身. 此分支作为自由群的子群依 Hielsen-Schreier 定理本身也是自由群. 这就证明了 $A$, 还有 $B$, 是自由群，而此时它们的自由积 $G$ 也是自由群. 但这就引到矛盾上去了，因为自由群不能分解成直积：假若这样的分解存在的话，则在自由群中可找到一个子群，它是两个无限循环群的直积，这和 Nielsen-Schreier 定理是矛盾的.

在自由群和自由积的理论中关于自同构群的问题占有显著地位. 任意有限秩自由群的自同构群的生成元素和定义关系组在 Nielsen[1, 2, 4]中得到确立（还可参看 B. Neumann[1]）. 在 Whitehead[2]中研究了下面问题：在什么条件下两个给定元素集合之一在此群的某一自同构下映到另外一个上（参看补充 9.4.）. Головин 和 Садовский[1]中对于一个特殊情况讨论了有限个任意不可分解群的自由积之自同构群，而对一般的情况可在 Фукс-Рабинович[6][7] 中找到. 然而这里所得到的所有结果叙述起来非常繁琐，故我们在此只限于讨论一个特殊情形.

设群 $G$ 是两个群的自由积, $G=A*B$, 并且因子 $A$ 和 $B$ 是不可分解的, 但不是无限循环群且彼此不同构. 群 $G$, $A$ 和 $B$ 的元素顺序记作 $g$, $a$, $b$. 在群 $G$ 的自同构群 $\Gamma$ 中可以指出下列子群: 子群 $\Phi_A$, 它是由群 $G$ 的按下列方式确定的自同构组成: 在因子 $A$ 中施行一个自同构而令因子 $B$ 恒等地映射到自身; 子群 $\Phi_B$, 它是用类似的方法确定的; 子群 $\Psi_A$, 它是由用 $A$ 中元素作变形而产生的 $G$ 之内自同构组成的; 子群 $\Psi_B$, 它是 $B$ 中元素产生的内自同构组成的.

显然, 子群 $\Phi_A$ 和 $\Phi_B$ 顺序同构于群 $A$ 和 $B$ 的自同构群. 这些群的元素将记作 $\alpha\in\Phi_A$ 和 $\beta\in\Phi_B$. 另一方面, 由于群 $G$ 中没有中心, 故子群 $\Psi_A$ 和 $\Psi_B$ 相应地同构于因子 $A$ 和 $B$. 用 $A$ 中元素 $a$ (用 $B$ 中元素 $b$) 作群 $G$ 的变形而得到的 $\Psi_A$ 中的 (子群 $\Psi_B$ 中的) 元素将记作 $\psi(a)$ (记作 $\psi(b)$).

现在来证明定理:

*子群 $\Phi_A, \Phi_B, \Psi_A$ 和 $\Psi_B$ 生成整个自同构群 $\Gamma$.*

事实上, 设 $\theta$ 是 $\Gamma$ 中任一元素. 自同构 $\theta$ 把自由分解 $G=A*B$ 映到某个自由分解 $G=A'*B'$, 并且由于上面证过的关于具不可分解因子之自由分解的同构定理以及关于 $G$ 所作的假设可知, 子群 $A'$ 和 $B'$ 顺序和子群 $A$ 和 $B$ 共轭:

$$A'=x^{-1}Ax, \qquad B'=y^{-1}By, \qquad x, y\in G.$$

顺序施行自同构 $\theta$ 和元素 $x^{-1}$ 所确定的群 $G$ 的变形 $\psi^{-1}(x)$ 所得到的自同构 $\chi$ 把子群 $A$ 映到自身上, 而把子群 $B$ 带到某个子群 $z^{-1}Bz$ 中, 并且元素 $z$ 可以认定是以 $A$ 中元素开头的字. 若是元素 $z$ 的长大于 1, 则 $B$ 中元素就无法由 $A$ 和 $z^{-1}Bz$ 中的元素相乘而得到, 而这时实际上该有 $G=A*(z^{-1}Bz)$. 因此 $z\in A$. 由之得, 自同构 $\chi\cdot\psi^{-1}(x)$ 在子群 $A, B$ 中只引出它们的自同构, 亦即属于 $\{\Phi_A, \Phi_B\}$, 而这时

$$\theta=[\chi\psi^{-1}(z)]\psi(z)\psi(x)\in\{\Phi_A, \Phi_B, \Psi_A, \Psi_B\},$$

因为

$$\psi(z)\in\Psi_A,\quad \psi(x)\in\{\Psi_A,\Psi_B\}.$$

现在我们指出关于上面找出的群$\Gamma$的生成元系的定义关系式组．容易验证，对于任意 $a\in A, b\in B, \alpha\in\Phi_A, \beta\in\Phi_B$ 有下列关系式：

1) $\alpha\beta=\beta\alpha,$

2) $\psi(a)\cdot\beta=\beta\cdot\psi(a),\quad \psi(b)\cdot\alpha=\alpha\cdot\psi(b),$

3) $\psi(a)\cdot\alpha=\alpha\cdot\psi(a^\alpha),\quad \psi(b)\cdot\beta=\beta\cdot\psi(b^\beta),$

其中 $a^\alpha$ 是元素 $a$ 在自同构 $\alpha$ 下的象，$b^\beta$ 是元素 $b$ 在自同构 $\beta$ 下的象．我们来证，所有形如 1)—3)的关系式组成群$\Gamma$的定义关系式组．

实际上，存在于我们的生成元之间的任何关系式都可以利用关系式 1)—3)化归成形式

$$\alpha\beta\psi(x)=1,$$

其中 $\psi(x)$是元素 $x$ 确定的群 $G$ 的变形．由之得$\alpha\beta=1$ 和$\psi(x)=1$，因为自同构 $\alpha\beta$ 不改变群 $G$ 中元素的长度，而内自同构 $\psi(x)$，只要它不是恒等对应，改变某些元素的长度．其次，因为自同构 $\alpha$ 只对 $A$ 中元素起作用，$\beta$ 只对 $B$ 中元素起作用，故由 $\alpha\beta=1$ 得 $\alpha=1$；$\beta=1$．最后，群 $G$ 的自同构群是子群$\Psi_A$ 和 $\Psi_B$ 的自由积，因而等式 $\psi(x)=1$ 意味着元素 $\psi(x)$ 是此自由积的空字．这就证明了群$\Gamma$中的任何关系式都可由关系式 1)—3)推得．

**具相重子群的自由积** 在某些情况下一个较自由积更一般的构成方法可能是有益的．设给定一些群 $A_\alpha$，其中 $\alpha$ 歷遍某个足码集，并设在每一个 $A_\alpha$ 中选定一个真子群 $B_\alpha$，使得所有这些子群与同一个群$B$同构．用 $\varphi_\alpha$ 表示 $B_\alpha$ 到$B$上一个确定的同构对应；$\psi_{\alpha\beta}=\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$ 便是 $B_\alpha$ 到 $B_\beta$ 上的同构对应．

群 $A_\alpha$ 的具相重子群 $B$ 的自由积指的是这些群 $A_\alpha$ 的自由积关于下面一个正规子群的商群 $G$，它是由所有形如 $b_\alpha b_\beta^{-1}$ 的元素生成

的，其中 $b_\beta = b_\alpha\psi_{\alpha\beta}$，$b_\alpha$ 历遍整个群 $B_\alpha$，而 $\alpha$，$\beta$ 历遍所有可能的足码对. 换言之，如果任意群 $A_\alpha$ 是由生成元系 $\mathfrak{M}_\alpha$ 和在此生成元系下的定义关系式组 $\Phi_\alpha$ 给出的，则群 $G$ 是以所有集合 $\mathfrak{M}_\alpha$ 之并集为生成元系，而其定义关系式组为所有集合 $\Phi_\alpha$ 之并集再加上下列各关系式：令不同子群 $B_\alpha$ 和 $B_\beta$ 中在同构对应 $\varphi_\alpha$ 和 $\varphi_\beta$ 下映到群 $B$ 的同一个元素上的两个元素相等而得到的关系式. 这样，就是依照同构对应 $\psi_{\alpha\beta}$ 把这些子群 $B_\alpha$"贴合"在一起了.

我们所给的定义没给出直接弄清群 $G$ 的结构的可能性——应当耽心的是，附加的补充定义关系式可能会引出子群 $A_\alpha$ 之间的一些贴合，而它不是由同构对应 $\psi_{\alpha\beta}$ 所规定的，或者这些附加的关系会把其中一个群 $A_\alpha$ 换成它的一个商群等等. 因而我们要进行一些补充讨论.

在每一个群 $A_\alpha$ 中在关于子群 $B_\alpha$ 的所有右陪集内各选一个代表，只是假定在子群 $B_\alpha$ 本身中取单位元为代表. 含有给定元素 $a_\alpha$ 的陪集之代表记作 $\bar{a}_\alpha$，即是有

$$a_\alpha = b_\alpha \bar{a}_\alpha, \quad b_\alpha \in B_\alpha. \tag{5}$$

我们把表示式

$$b\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_n, \tag{6}$$

叫作字，其中 $n \geqslant 0$，$b$ 是群 $B$ 中任一元素，也可能是单位元，任一个 $\bar{a}_i$ 是群 $A_\alpha$ 关于子群 $B_\alpha$ 的一个右陪集的异于 1 的代表以及，最后，相邻的代表 $\bar{a}_i\bar{a}_{i+1}$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 属于不同的群 $A_\alpha$.

*群 $A_\alpha$ 的具有相重子群 $B$ 的自由积 $G$ 中的任意元素可以写成(6)的形式，并且写法是唯一的.*

这样表示法的存在性是很容易证明的. 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是群 $A_\alpha$ 的自由积中的一个元素，并已是最简表示式，$a_i \in A_{\alpha_i}$. 如果 $n=1$，则所求的记法由(5)给出. 因此假设已证得

$$a_2a_3\cdots a_n = b\overline{a_2'}\,\overline{a_3'}\cdots\overline{a_n'},$$

其中在右侧的是一个字．设

$$b\varphi_{\alpha_1}^{-1}=b_1,\quad a_1b_1=a_1',\ a_1'=b_1'\overline{a_1'},\quad b_1'\varphi_{\alpha_1}=b'.$$

如果 $\bar{a}_1'=1$，则

$$a_1a_2\cdots a_n=b'\overline{a_2'}\cdots\overline{a_s'}$$

其中在右侧的是一个字．若是$\overline{a_1'}\neq 1$，则在$\overline{a_1'}$和$\overline{a_2'}$属于不同群 $A_\alpha$ 的情形，所求记法是

$$a_1a_2\cdots a_n=b'\overline{a_1'}\ \overline{a_2'}\cdots\overline{a_s'}.$$

最后，如果是$\overline{a_1'}$和$\overline{a_2'}$属于同一个群 $A_\alpha$，则令

$$\overline{a_1'}\ \overline{a_2''}=b_\alpha\overline{a_1''};\qquad b_\alpha\varphi_\alpha=b'';$$

此时当$\overline{a_1''}\neq 1$ 有

$$a_1a_2\cdots a_n=(b'b'')\overline{a_1''}\ \overline{a_3'}\cdots\overline{a_s'},$$

而当$\overline{a_1''}=1$ 时有

$$a_1a_2\cdots a_n=(b'b'')\overline{a_3'}\cdots\overline{a_s'}.$$

这里指出，上面描述的过程，如果把它实际应用到乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 且约定由其尾部开始，则引出一个完全确定的形如(6)的字．我们将称此程式为乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 的约简．

为了证明所讨论的记法的唯一性我们利用在 §33 中曾使用过的一个方法．用$M$表示所有形如(6)的字之集合，而用 $S_M$ 表示集合$M$到自身上的所有相互单值映射作成的群．如果 $a$ 是群 $A_\alpha$ 中的一个元素，则把它对应到集合$M$到自身上的一个映射 $\hat{a}$ 上．$\hat{a}$ 的定义如下：设(6)是任一个字．把它看成群 $A_\alpha$ 的自由积中的一个元素从右侧乘以元素 $a$，转到最简表示式之后再应用约简．我们认定这样得到的新字为在映射 $\hat{a}$ 下字(6)的象．

如果元素 $a$ 是群 $A_\alpha$ 的单位元，则它对应于集合$M$到自身上的恒等映射．讨论各各不同的特殊情形，容易验证，对应群 $A_\alpha$ 的两个元素 $a$ 和 $a'$ 之乘积的映射等于依次施行映射 $\hat{a}$ 和 $\hat{a'}$的结果．特

别，元素 $a^{-1}$ 对应于映射 $\hat{a}$ 的逆映射，因而 $\hat{a}$ 是相互单值的且是到整个 $M$ 上的映射.

这里指出，当 $a\neq 1$，$a=b\bar{a}$ 时字 1 被映到字 $b\bar{a}$，它是异于 1 的，即映射 $\hat{a}$ 不是恒等的. 因而我们得到群 $A_\alpha$ 到群 $S_M$ 的子群 $\hat{A}_\alpha$ 上的同构对应. 设 $\hat{G}$ 是群 $S_M$ 中的由所有 $\hat{A}_\alpha$ 生成的子群. 显然，在群 $\hat{G}$ 中满足群 $G$ 的所有定义关系式，并且 $\hat{G}$ 中元素形如(6)的记法是唯一的. 这是因为，若 $b_\alpha\psi_{\alpha\beta}=b_\beta$，则显然映射 $\hat{b}_\alpha$ 和 $\hat{b}_\beta$ 是相等的而这就给与符号 $\hat{b}$ 以唯一的含意. 但映射

$$\hat{b}\ \hat{\bar{a}}_1\ \hat{\bar{a}}_2\ \cdots\ \hat{\bar{a}}_n \tag{7}$$

刚好把字 1 映到字(6)，亦即不同的乘积(7)是群 $\hat{G}$ 中不同的元素. 由之便得群 $G$ 中元素写成字的形式的唯一性.

现在已经可以不困难地确立群 $A_\alpha$ 具有相重子群 $B$ 的自由积 $G$ 的一系列性质.

*群 $A_\alpha$ 可作为子群含在群 $G$ 中，它们合在一起生成群 $G$ 并且两两相交刚好在相重子群 $B$ 上.*

实际上，等式(5)之右侧的字当 $a_\alpha\neq 1$ 时异于字 1. 若是 $a_\alpha\notin B_\alpha$，则对 $A_\beta$，$\beta\neq\alpha$，中任意元素 $a_\beta$，约简乘积 $a_\beta^{-1}a_\alpha$ 便得一个字，它以 $\bar{a}_\alpha$ 结尾，即异于 1.

*群 $G$ 中任意有限阶的元素在 $G$ 中和某个子群 $A_\alpha$ 中的元素共轭.*

事实上，设把 $G$ 中有限 $k$ 阶元素 $g$

$$g^k=1,$$

写成(6)的形式. 如果 $n\leqslant 1$，则没什么可证的. 如果 $n>1$ 且若在此记法中的元素 $\bar{a}_1$ 和 $\bar{a}_n$ 属于一个子群 $A_\alpha$，则在用元素 $\bar{a}_n^{-1}$ 变形而继之以约简之后我们就转到较小长度的字. 因而我们将认定 $n>1$ 而元素 $\bar{a}_1$ 和 $\bar{a}_n$ 属于不同的子群 $A_\alpha$，而来证明，这种情况实际

上是不可能的. 事实上,把字(6)紧挨着写 $k$ 次并且每次都把相邻的因子 $b$ 和 $a_1$ 合并在一起. 由于所作的假设我们必得到某些群 $A_\alpha$ 中的若干元素相乘的最简表示式，并且这些元素都在相应的子群 $B_\alpha$ 之外. 这样，在进行约简时永远不会遇到等于单位元的代表——因为在 $A_\alpha$ 内而在 $B_\alpha$ 外的元素从左侧乘以 $B_\alpha$ 中的元素当然不在 $B_\alpha$ 内,因此约简不会引到字 1 上.

*如果 $C_\alpha$ 是子群 $B_\alpha$ 和群 $A_\alpha$ 的中心之交，则群 $G$ 的中心将是群 $B$ 的所有子群 $C_\alpha\varphi_\alpha$ 之交.*

显然,所有子群 $C_\alpha\varphi_\alpha$ 之交在群 $G$ 的中心内. 另一方面，设元素

$$g=b\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_n$$

属于群 $G$ 的中心. 若 $n\geqslant1$ 而 $\bar{a}_n\in A_\alpha$,则在任意群 $A_\beta$, $\beta\neq\alpha$, 中取出任意一个不在 $B_\beta$ 中的元素 $a'$. 此时对乘积 $ga'$ 和 $a'g$ 的约简显然引出不同的字来. 若是 $n=0$,即是 $g=b$,但 $b$ 在某一个 $C_\alpha$ 之外,则只要把 $a'$ 取为群 $A_\alpha$ 中与元素 $b\varphi_\alpha^{-1}$ 不可换的一个元素，我们仍是得出矛盾.

关于具有相重子群的自由积的子群问题要求我们去研究一个更一般的构造方法:代替所有群 $A_\alpha$ 都按同一个子群 $B$ 贴合起来而假设对每一对群 $A_\alpha, A_\beta$ 按某个子群 $B_{\alpha\beta}$ 贴合起来，并且在所有群 $A_\alpha$ 中这些子群 $B_{\alpha\beta}$ 的选择应以适当方式和谐起来. 这个构造在 H. Neumann[1][2][3]中研究了. 这个构造之有趣还在于它的特殊情况是 §7 中引入的群的递增列之并(参看补充 8).

## §36. 自由群的子群

我们在上一节中由关于自由积的子群定理得出 Nielsen-Schreier 定理. 这个定理对于有限秩自由群的情况是由 Nielsen [3]证明的而 Schreier[4]把它推广到任意自由群上. Nielsen 的

方法由 Гуревич[1] 从根本上简化了. Levi[2] 给了 Nielsen-Schreier 定理另一个证明. 还有一些拓扑的证明, 参看 Reidemeister[3], Locher[1]. Federer 和 Jónsson[1] 还发表了一个新的证法[1)].

由于这个定理的重要性, 这里我们再介绍它的一个证明, 它和自由积的一般理论无关, 即是 Гуревич 的证法.

设给定一个自由群 $G$, 它有自由生成元系 $a_\alpha$, 其中 $\alpha$ 取遍某个集合, 并设 $U$ 是 $G$ 的一个子群. 在每个右陪集 $Ug$ 中选定一个代表 $\bar{g}$, 且在子群 $U$ 本身中选单位元为其代表, 即 $\bar{1}=1$. 我们要求代表的选择满足下面条件: 如果写成字的形状 $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i=\pm 1$ 的一个元素是它所在陪集的代表, 则它的任意截段 $a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$, $k\leqslant n$, 也是它自己所在陪集的代表.

我们来证明, 这样的选择代表是可能的. 设 $l$ 是陪集 $Ug$ 中字的最小长, 并设对具有较 $l$ 小的最小长的陪集, 所要求的代表选择已经实现了; 实际上, 当 $l=0$ 时, 也就是对 $U$ 来说, 这是作得到的. 在陪集 $Ug$ 中取一个最小长的字; 设它是

$$g=a_{\beta_1}^{\eta_1}a_{\beta_2}^{\eta_2}\cdots a_{\beta_l}^{\eta_l},\quad \eta_i=\pm 1.$$

元素 $g'=a_{\beta_1}^{\eta_1}a_{\beta_2}^{\eta_2}\cdots a_{\beta_{l-1}}^{\eta_{l-1}}$ 确定陪集 $Ug'$, 在其中具有要求性质的代表已经选定. 如果此代表是 $\bar{g}'=a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$, 则 $g'=u\bar{g}'$, $u\in U$, 由之

$$g=u\bar{g}'a_{\beta_l}^{\eta_l}.$$

元素 $\bar{g}'a_{\beta_l}^{\eta_l}$ 在陪集 $Ug$ 中, 现在可选之为 $\bar{g}$. 它的表示式

$$\bar{g}=a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}a_{\beta_l}^{\eta_l}$$

是一个字, 因为 $l$ 是陪集 $Ug$ 中元素的最小长(从而 $k=l-1$), 并且此字的任意(从开始起)截段是它自己所在陪集的代表.

设 $\bar{g}$ 是我们选定的任意一个代表, $a_\alpha$ 是任意一个生成元. 考

1) 截至准备第三版期间又发表了一些其他证明(参看补充 9.1).

虑乘积 $\bar{g}a_\alpha(\overline{ga_\alpha})^{-1}$. 显然，它与在以 $\bar{g}$ 为代表的陪集中对元素 $g$ 的选择是无关的，并且若 $\bar{g}=u_1g, \overline{ga_\alpha}=u_2ga_\alpha$, 其中 $u_1, u_2\in U$, 则

$$\bar{g}a_\alpha(\overline{ga_\alpha})^{-1}=u_1u_2^{-1}\in U.$$

当这个乘积异于单位元时，我们约定把它记作 $u_{\bar{g},\alpha}$

$$u_{\bar{g},\alpha}=\bar{g}a_\alpha(\overline{ga_\alpha})^{-1},\quad \text{当}\bar{g}a_\alpha(\overline{ga_\alpha})^{-1}\neq 1,$$

而来证明，所有 $u_{\bar{g},\alpha}$ 的集合是子群 $U$ 的生成元系.

若 $u=a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}\in U$, 则设 $g_k=a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$, $k\leqslant n$. 显然 $g_0=1, g_n=u$. 此时

$$u=\prod_{k=1}^{n}\bar{g}_{k-1}a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}(\bar{g}_k)^{-1},$$

因为 $\bar{g}_0=\bar{g}_n=1$. 但是若 $\varepsilon_k=+1$, 则

$$\bar{g}_{k-1}a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}(\bar{g}_k)^{-1}=\bar{g}_{k-1}a_{\alpha_k}(\overline{g_{k-1}a_{\alpha_k}})^{-1}.$$

此元素等于 $u_{\bar{g}_{k-1},\alpha_k}$ 或者单位元；若 $\varepsilon_k=-1$, 则由 $g_k=g_{k-1}a_{\alpha_k}^{-1}$ 得 $g_{k-1}=g_ka_{\alpha_k}$, 因此

$$\bar{g}_{k-1}a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}(\bar{g}_k)^{-1}=\overline{g_ka_{\alpha_k}}a_{\alpha_k}^{-1}(\bar{g}_k)^{-1},$$

此元素等于 $u_{\bar{g}_k,\alpha_k}^{-1}$ 或者是单位元.

如果对元素 $u$ 来取用生成元 $a_\alpha$ 表示的另外一个记法——这个新的记法可由原来的记法经有限次初等变换而得，这里的初等变换是指把两个紧邻的相互为逆的符号 $a_\alpha$ 和 $a_\alpha^{-1}$ 去掉或者嵌入——且若对此新的记法应用刚给出的方法而把元素 $u$ 通过生成元 $u_{\bar{g},\alpha}$ 来表示，则经直接验证可以确信，这个新的表示式可由原来的经相应的去掉或嵌入紧邻互逆符号 $u_{\bar{g},\alpha}$ 和 $u_{\bar{g},\alpha}^{-1}$ 而得到. 换言之，如果 $U^*$ 是具自由生成元 $u_{\bar{g},\alpha}$ 的自由群[1]，则在上段中所描述的把元素 $u$ 用元素 $u_{\bar{g},\alpha}$ 表出的方法就使子群 $U$ 中任一元素 $u$ 和群 $U^*$

1）准确地说，这是一个自由群，它的自由生成元与元素 $u_{\bar{g},\alpha}$ 之间有一个一一对应.

中一个完全确定的元素 $u^*$ 对应起来. 用符号 $\equiv$ 表示群 $U^*$ 中元素间的相等. 因为对 $U$ 中任意两个元素 $u_1$ 和 $u_2$ 有等式

$$(u_1u_2)^* \equiv u_1^* u_2^{*}\text{[1]},$$

则对应 $u \to u^*$ 是子群 $U$ 到子群 $U^*$ 内的同态对应. 现在来证明, 它是一个到整个群 $U^*$ 上的同构对应.

为了证明, 我们来找元素 $u_{\bar{g},\alpha}^*$. 如果

$$\bar{g} = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}, \qquad \overline{g a_\alpha} = a_{\beta_1}^{\eta_1}\cdots a_{\beta_m}^{\eta_m},$$

则

$$u_{\bar{g},\alpha} = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} a_\alpha a_{\beta_m}^{-\eta_m}\cdots a_{\beta_1}^{-\eta_1}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots a_{\alpha_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}}\, a_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}\, \overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\cdots a_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}}^{-1}) \cdot (\bar{g} a_\alpha \overline{\bar{g} a_\alpha}^{-1})$$

$$\cdot \prod_{j=0}^{m-1} \overline{\bar{g} a_\alpha a_{\beta_m}^{-\eta_m}\cdots a_{\beta_{m-j+1}}^{-\eta_{m-j+1}}}\, a_{\beta_{m-j}}^{-\eta_{m-j}}\, \overline{\bar{g} a_\alpha a_{\beta_m}^{-\eta_m}\cdots a_{\beta_{m-j}}^{-\eta_{m-j}}}^{-1}).$$

如果这时我们利用(这在整个证明中还是第一次)下面这一事实: 代表的任意截段本身也是它所在陪集的代表, 并且还注意到, 当 $0 \leqslant j \leqslant m-1$ 时有

$$\overline{\bar{g} a_\alpha a_{\beta_m}^{-\eta_m}\cdots a_{\beta_{m-j}}^{-\eta_{m-j}}} = \overline{u_{\bar{g},\alpha} a_{\beta_1}^{\eta_1}\cdots a_{\beta_{m-j-1}}^{\eta_{m-j-1}}} = a_{\beta_1}^{\eta_1}\cdots a_{\beta_{m-j-1}}^{\eta_{m-j-1}},$$

则不难发现, 在我们得到的这个乘积中除去等于其自身 $u_{\bar{g},\alpha}$ 的一个因子以外其他的因子都不见了. 这就证明了

$$u_{\bar{g},\alpha}^* \equiv u_{\bar{g},\alpha}.$$

这样, 群 $U^*$ 中的任一个生成元, 随之此群的所有元素都是 $U$ 中元素的象. 同时我们得到子群 $U$ 是自由群, 而元素 $u_{\bar{g},\alpha}$ 的集合是它的自由生成元系. 这就结束了 Nielsen-Schreier 定理的证明.

这里叙述的对自由群的子群构造自由生成元系的方法, 可以

1) 为了证它, 只需在乘积 $u_1u_2$ 中不作任何的化简而对它应用构造元素 $u^*$ 的方法.

用来建立自由群的一些新的性质.

I. *有限秩 $n, n>1$, 的自由群, 其换位子群是可数秩自由群.*

实际上, 设自由群 $G$ 以元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为自由生成元系并设 $K$ 是此群的换位子群. $K$ 的每一陪集含且仅含一个形如 $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}$ 的元素, 其中指数 $\alpha_i$ 是某些整数, 并且在选择这些元素作代表时, 也要求在上述证明中对代表提出的条件被满足. 然而, 易见, 元素 $\bar{g}a_i\overline{ga_i}^{-1}$ 等于 1, 其中

$$\bar{g}=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n},\quad \alpha_n=\alpha_{n-1}=\cdots=\alpha_{s+1}=0,\quad \alpha_s\neq 0,\quad s\leqslant n,$$

当且仅当 $s\leqslant i$. 由之得子群 $K$ 之秩的无限性.

II. (Schreier[4]). *若在有限秩 $n$ 的自由群 $G$ 中给定一个有限指数 $j$ 的子群 $U$, 则此子群的秩 $k$ 也是有限的并且满足等式*

$$k=1+j(n-1).$$

设在 $G$ 中给一自由生成元系 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 并设在对 $U$ 的右陪集中选定代表 $\bar{g}$, 且知每个代表的任意截段仍是其自己陪集中的代表. 形如 $\bar{g}a_i\overline{ga_i}^{-1}$ 的乘积总数显然等于 $jn$; 已经从这里可得 $k$ 是有限的. 现在我们来计算一下, 这些乘积有多少个等于 1.

设 $P_l$ 是长为 $l$ 且是以某一个元素 $a_i$ 为最后一个因子的代表 $\bar{g}$ 的个数, $P'_l$ 是同一长但以某一元素 $a_i^{-1}$ 结尾的代表个数; 这里我们设 $P_0=1, P'_0=0$. 如果这时有 $\bar{g}a_i\overline{ga_i}^{-1}=1$, 亦即 $\bar{g}a_i=\overline{ga_i}$, 且若 $\bar{g}$ 有长 $l$, 则元素 $ga_i$ 的长等于 $l-1$ 或 $l+1$. 在第一种情形 $\bar{g}$ 以 $a_i^{-1}$ 结尾. 当给定了 $l$ 以及任意的 $i$ 时, 共有 $P'_l$ 个这种情形, 因为, 反过来, 若 $\bar{g}$ 以 $a_i^{-1}$ 结尾, 则 $\overline{ga_i}$ 是 $\bar{g}$ 的截段, 因而 $\bar{g}a_i\overline{ga_i}^{-1}=1$. 如果出现第二种情形, 则 $\overline{ga_i}$ 是长为 $l+1$ 的代表且其最后一个指数为正. 反过来, 若长度为 $l+1$ 的某个代表以 $a_i$ 结尾, 则它具有形状 $\bar{g}a_i$, 其中 $\bar{g}$ 是其长为 $l$ 的截段, 而此时 $\bar{g}a_i\overline{ga_i}^{-1}=1$. 因此, 这种情形共有 $P_{l+1}$ 个. 这样, 乘积中等于单位元的总数等于和

$$\sum_{l\geq 0}(P_l'+P_{l+1}),$$

即是等于 $j-1$, 因为把 $P_0$ 加进此和便得 $j$, 而 $P_0=1$. 这时

$$k=jn-(j-1)=1+j(n-1).$$

定理证完.

III. (M. Hall[4]). 设在自由群 $G$ 中给一递降子群列

$$G=A_0\supset A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots,$$

它具有以下性质：对于任意 $k$, $k\geqslant 0$, 以及任意选择群 $A_k$ 的一个自由生成元系，子群 $A_{k+1}$ 中任意异于 1 的元素在这些自由生成元下具有大于或等于 3 的长，这时给定子群列之交等于 $E$.

设在群 $G$ 中给定一个自由生成元系. 应用上面在证明 Nielsen-Schreier 时指出的方法在子群 $A_1$ 中选定一个自由生成元系. 从群 $A_1$ 的这个自由生成元系出发用同样的方法选定 $A_2$ 中的自由生成元系，等等.

设 $x$ 是子群 $A_k$, $k\geqslant 1$, 的任意元素. 若 $n$ 是它在群 $A_{k-1}$ 中选定的生成元下的长度，则它在子群 $A_k$ 中所选定的生成元下之长度不大于 $n$(参看 Nielsen-Schreier 定理的证明中子群 $U$ 中的元素 $u$ 用元素 $u_{\bar{g},\alpha}$ 来表示的那一段). 但是在我们这个情形此长度还该是严格小于 $n$: 若

$$x=a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$$

是元素 $x$ 在群 $A_{k-1}$ 的选定的生成元下的最简表示式，且若有 $\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}}\neq a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}$, 则

$$a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}=y\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}},\quad y\in A_k,$$

由之将要有子群 $A_k$ 中的元素

$$y=a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}}^{-1}$$

异于 1. 但它在群 $A_{k-1}$ 的选定的生成元下的长度等于 2, 因为陪集 $A_ka_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}$ 的代表 $\overline{a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}}$ 在此集中有最小的长度，即长度为 1. 这就与

定理的条件相矛盾. 这样，由 $A_{k-1}$ 转到 $A_k$ 时 $A_k$ 中元素的长度严格减小，因此，任意异于 1 的元素都不能属于所有的子群 $A_k$（参看补充 9.1）.

从最后一个定理得到下面的结果：若 $\omega$ 是第一个无限序数，则自由群的第 $\omega$ 换位子群（参看 §14）等于 $E$. 实际上，若 $x_\alpha$ 是自由群 $G$ 的自由生成元，$y$ 是群 $G$ 的换位子群中的一个元素，$y \neq 1$，则在元素 $y$ 用这些生成元 $x_\alpha$ 表出的最简表示式中每一 $x_\alpha$ 的指数的和等于零. 从而在诸生成元 $x_\alpha$ 下元素 $y$ 的长度不小于 4.

刚证得的这个推论也可由下面的定理得出.

**Magnus 定理.** *若 $G$ 是任意自由群，则它的下中心链的第 $\omega$ 项等于 $E$.*

这个定理是在 Magnus[6] 中被证明的并在 Witt [1], Фукс-Рабинович[5], M. Hall[4] 中重新证明过. 它也包含在 Мальцев [7] 中一些更一般的结果中，它们涉及这样一个问题：在什么条件下某些群的自由积之下中心链的第 $\omega$ 项等于 $E$. 下面我们利用 Мальцев 的方法来证明 Magnus 定理.

设 $R$ 是任意结合环. 对 $R$ 中任意 $a$ 和 $b$ 令

$$a \circ b = a + b - ab,$$

我们便在 $R$ 中得到一个新的运算，称之为*归联乘法*. 此运算是结合的：

$$a\circ(b\circ c) = a\circ(b+c-bc) = a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$$
$$=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c=(a\circ b)\circ c.$$

在归联乘法中显然环 $R$ 的零元起单位元的作用

$$a\circ 0 = 0\circ a = a.$$

称环 $R$ 的元素 $a$ 是*根元*，如果对它存在有一个归联逆元 $a'$，即指满足等式

$$a\circ a' = a'\circ a = 0$$

的元素. 显见

$$(a')' = a.$$

根元的归联乘积仍是根元,因为

$$(a \circ b)' = b' \circ a'.$$

我们得到,环$R$的根元按归联乘法组成一个群,称之为环$R$的*归联群*.

今设给定某个势 $\mathfrak{m}$, 它是有限的或无限的. 取符号 $e_\alpha$ 的集合,其中足码$\alpha$取遍势为$\mathfrak{m}$的一个集合,而称任意形如

$$e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \cdots e_{\alpha_n}$$

的表示式为*长度为 $n$ 的字*, 其中 $n \geqslant 1$ 而 $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, 亦即相邻的«因子»是不相等的. 用下面方法作一个环 $R$. 其元素是带异于零的某些整系数的有限个字的形式和; 并认定在不计被加项次序下$R$中元素表成这种和的记法是唯一的. 在$R$的元素中再添加一个字的空和, 它不包含带有非零系数的任意字.

两个字和的**加法**定义为把其相同字的系数相加继之以舍弃所有系数变成零的字. 显然, 这个加法是交换的, 结合的并具有减法; 特别, 零元将是字的空和.

现在来定义*字的乘积*. 若给定字

$$v_1 = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \cdots e_{\alpha_n}, \quad v_2 = e_{\beta_1} e_{\beta_2} \cdots e_{\beta_s},$$

则当 $\alpha_n \neq \beta_1$ 时表示式

$$e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \cdots e_{\alpha_n} e_{\beta_1} e_{\beta_2} \cdots e_{\beta_s}$$

是一个字,就把它定义为乘积 $v_1 v_2$. 若是 $\alpha_n = \beta_1$, 则设 $v_1 v_2 = 0$; 特别, 任意字 $e_\alpha$ 的平方等于零. 这里提一下, 若 $v_1 v_2 \neq 0$, 则字 $v_1 v_2$ 的长度等于字 $v_1$ 和 $v_2$ 的长度之和.

两个字和的*乘积*如下来定义: 第一个和的每一项与第二个和的每一项相乘,此时系数间相乘,而依上面说明的意义下取字之间的乘积, 这之后合并同类项并舍弃其系数变成零的那些项. 这个

乘法当然不是交换的. 但是它是结合的,因为字的乘法是结合的,并且它对加法有分配律.

这样, 我们构造了一个环 $R$. 用 $G$ 表示此环的归联群. $G$ 中含有每一个元素 $e_\alpha$; 这是因为

$$e'_\alpha = -e_\alpha. \tag{1}$$

现在来证明,在群 $G$ 中由所有元素 $e_\alpha$ 生成的子群 $F$ 是自由群, 而 $e_\alpha$ 的集合是它的自由生成元系.

实际上, $e_\alpha \circ e_\alpha = 2e_\alpha$ 并且一般地对于任意整数 $k$, 正的也好而由(1)负的也好,元素 $e_\alpha$ 的归联 $k$ 次幂等于 $ke_\alpha$. 这样, 元素 $e_\alpha$ 在群 $G$ 中生成一个无限循环群. 若是我们考察乘积

$$k_1 e_{\alpha_1} \circ k_2 e_{\alpha_2} \circ \cdots \circ k_n e_{\alpha_n}, \tag{2}$$

其中 $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, 而所有 $k_i$ 异于零,则展开这个归联乘积,我们特别可得到其中一项

$$(k_1 k_2 \cdots k_n) e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \cdots e_{\alpha_n}.$$

这是具有非零系数的唯一的一个长度为 $n$ 的项,它和谁都消不掉,因此乘积(2)不等于零,亦即不等于群 $G$ 的单位元, 而这也就是要证的.

若在 $R$ 中取一异于零的元素, 则称其中具有最小长度的一些项为小项,而它们的长度称作这个元素的高. 其次,约定零元素的高是无限的,即大于 $R$ 中任何其他元素的高. 容易验证,乘积的高大于或等于因子之高的和. 另一方面, 和的高大于或等于被加项之高中的较小者,因而 $R$ 中元素的归联乘积,如果异于零, 则其高大于或等于因子之高中的较小者.

现在,若 $a$ 是 $G$ 中元素,则元素 $a$ 和 $a'$ 的高相等. 实际上

$$a + a' - aa' = 0,$$

但乘积 $aa'$ 的高大于每一因子的高, 因而被加项 $a$ 和 $a'$ 的小项必互相抵消掉.

若元素 $a$ 和 $b$ 在群 $G$ 中且异于零，则它们的换位子的高大于此二元素之任何一个的高. 事实上，展开换位子的表示式并注意到归联逆元的定义，得

$$a'\circ b'\circ a\circ b=-a'b'-ab-a'b-b'a+a'ab+b'ab+a'b'a$$
$$+a'b'b-a'b'ab.$$

右侧和中每一项的高大于 $a$、$b$ 中每一元素的高，故此时对整个的和这也是对的.

今考察群 $F$ 的下中心链

$$F=F_0\supset F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots, \tag{3}$$

并证明，$F_n$ 中任意元素的高大于或等于 $n+1$. 这对 $F=F_0$ 是对的. 设对 $F_n$ 也已证明. 作 $F_n$ 中元素 $a$ 与 $F$ 中任一元素的换位子，我们便得到一个元素，它的高大于元素 $a$ 的高，即是大于或等于 $n+2$. 此时这一点对于这样换位子的归联乘积，亦即对子群 $F_{n+1}$ 中所有元素也是对的.

由之得，子群(3)的交，也就是秩为 $\mathfrak{m}$ 的自由群 $F$ 的下中心链的第 $\omega$ 项等于单位群. 因为势 $\mathfrak{m}$ 是任意的，所以这就证明了 Magnus 定理.

我们指出 Witt[1] 中的一个定理而略去证明，它是说，自由群 $F$ 的下中心链(3)的因子 $F_n/F_{n+1}$，$n=0,1,2,\cdots$ 是自由阿贝尔群.

在 Levi[3] 中可以找到一个和上面证过的 M. Hall 和 Magnus 定理同样类型的定理. 所有这些定理都是部分的回答一个一般的、不那么太确定的问题，即关于研究自由群的所有子群的问题，或者使用一下在第十一章中才引用的一个术语，这是关于自由群的子群格的刻划问题. 无论如何自由群是非常富有子群以及正规子群的. 这是可以从不同的想法，特别从下面的定理而认识到的.

若 $G$ 是一个自由群，而 $g$ 是其中异于 1 的一个元素，则在 $G$

中存在有限指数的正规子群，它不包含 $g$.

这个定理包含在 Мальцев[2]中一个更一般的定理 7 中. 晚一些时候它又在 Iwasawa[2]中独立地被证明过. 这个定理还有下面这个简单的证明.

设 $x_\alpha$($\alpha$ 历遍某个足码集)是群 $G$ 的自由生成元系. 在元素 $g$ 的最简表示式中出现的此系中的生成元记作 $x_1, x_2, \cdots, x_s$. 这样元素 $g$ 的最简表示式具有形状

$$g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}, \tag{4}$$

其中 $1 \leqslant i_k \leqslant s$, $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

我们取作用在符号 $1, 2, \cdots, n+1$ 上的 $n+1$ 次对称群 $S_{n+1}$, 并按下面方法在其中选出置换

$$x_1', x_2', \cdots, x_s', \tag{5}$$

设 $k = 1, 2, \cdots, n$. 若 $\varepsilon_k = +1$, 则要求置换 $x_{i_k}'$(由于 $1 \leqslant i_k \leqslant s$ 这将是置换(5)中的一个)把符号 $k$ 变到 $k+1$. 若是 $\varepsilon_k = -1$, 则认定这个置换把符号 $k+1$ 变到 $k$. 当然, 这样不能把(5)中任一个 $n+1$ 次置换完全确定下来, 因为(5) 中每一个置换暂时只是把符号 $1, 2, \cdots, n+1$ 中的一部分映到这些符号的一部分上. 但是, 这个映射是相互单值的, 因为, 由于(4)是最简表示式, (5)中任一置换都不会把某个符号 $k$ 映到两个不同的符号 $k-1$、$k+1$ 上去或者是把两个不同符号 $k-1$ 和 $k+1$ 映到同一个符号 $k$ 上去. 这样, 映射(5)是可以补充定义的, 亦即事实上可认定映射(5)是群 $S_{n+1}$ 中的置换.

若把元素 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 相应地映到元素 $x_1', x_2', \cdots, x_s'$ 上, 而将所有其余自由生成元 $x_\alpha$ 映到群 $S_{n+1}$ 的单位元上, 则我们就得到一个群 $G$ 到有限群 $S_{n+1}$ 内的同态对应. 此同态对应的核是 $G$ 的一个有限指数正规子群, 元素 $g$ 在此正规子群之外, 因为它被映到置换

$$g' = x'^{\varepsilon_1}_{i_1} x'^{\varepsilon_2}_{i_2} \cdots x'^{\varepsilon_n}_{i_n},$$

而依置换(5) 的定义它把符号 1 映成符号 $n+1$，亦即它不是恒等置换. 定理证完.

在 M. Hall [2] 中含有此定理的一个部分推广. (参看补充 9.2.).

## §37. 自由群的全特征子群. 恒等关系式

自由群的全特征子群特别使我们感兴趣. 这首先是由于它们和群中所谓*恒等关系式*之间的联系.

我们知道，在任意阿贝尔群中，在等式

$$x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2=1 \quad \text{或} \quad [x_1, x_2]=1 \tag{1}$$

中当把《未知元》$x_1$ 和 $x_2$ 换成群中任意元素时它仍是成立的. 相应地在任意亚阿贝尔群(参看 § 14)中又是对于群中任意 $x_1$, $x_2$ 和 $x_3$ 有等式

$$[[x_1, x_2], x_3]=1. \tag{2}$$

最后在 $n$ 阶有限群中任意元素的阶整除 $n$，因而《恒等地》满足等式

$$x_1^n=1. \tag{3}$$

一般地，设给定一个群 $G$. 我们考虑一个起辅助作用的自由群 $W$，它有可数个自由生成元. 若 $w$ 是群 $W$ 中的一个元素，亦即由生成元 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 组成的字，则等式

$$w=1 \tag{4}$$

叫作群 $G$ 中的*恒等关系式*，如果把在字 $w$ 中出现的那些 $x$ 分别换成 $G$ 中任意元素时它总是成立的.

一般的说，群 $G$ 可以具有很多的恒等关系式. 例如，如果在 $G$ 中关系式(3)被恒等地满足，则关系式 $x_1^{2n}=1$, $x_2^n=1$, $(x_1x_2x_3)^n=1$ 等等也被满足. *群 $G$ 的所有恒等式的左侧组成群 $W$ 中的一个全特*

征子群 $V_G$.

事实上，若在群 $G$ 中下列恒等关系式被满足：

$$w_1=1, \qquad w_2=1,$$

则显然下列关系式也被满足：

$$w_1w_2=1 \quad 和 \quad w_1^{-1}=1,$$

亦即恒等关系式左侧确组成自由群 $W$ 的子群. 现在我们来考察群 $W$ 的任一自同态 $\varphi$. 它把每一生成元 $x_i$ 映到元素 $x_i\varphi$，它是由生成元 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 组成的字. 若(4)是群 $G$ 的任意一个恒等关系式而

$$w=x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\cdots x_{i_n}^{\alpha_n},$$

则

$$w\varphi=(x_{i_1}\varphi)^{\alpha_1}(x_{i_2}\varphi)^{\alpha_2}\cdots(x_{i_n}\varphi)^{\alpha_n}.$$

右侧是生成元 $x_1, x_2, \cdots$ 的一个字. 在此字中用 $G$ 中任意元素来代替这些生成元等价于先把这些元素代入字 $x_{i_k}\varphi, k=1, 2, \cdots, n$ 中，再把所得到的结果代入字 $w$ 中. 最后的这次代入便把字 $w$ 变成单位元，因此

$$w\varphi=1$$

也是群 $G$ 中的恒等关系式，即 $w\varphi\in V_G$.

例如，恒等关系式(1)对应着群 $W$ 的换位子群，关系式(2)对应着群 $W$ 的下中心链的第二项 $W_2$. 最后，群 $W$ 中对应于恒等关系式(3)的全特征子群是群 $W$ 中所有元素的 $n$ 次幂生成的子群. 以后将称此子群为群 $W$ 的 $n$ 次幂并记作 $W^n$. 这个全特征子群的定义可以搬到任意群上去，这一点我们在 §14 中已指出过了.

为了给出群 $G$ 的所有恒等关系式，显然没有必要写出相应子群 $V_G$ 中的所有元素，而只需在此子群中选出一些元素，它们在群 $W$ 中生成的全特征子群恰是该子群. 当然，这样元素的选择方法不是唯一的.

能否对可数秩自由群$W$的任一全特征子群$H$指出一个群$G$，使得$H=V_G$呢？由下面的讨论可得出此问题的肯定答案.

设给定一个群$G$. 我们把它表成某个具自由生成元系$M=(a_\alpha)$的自由群$F$关于正规子群$N$的商群

$$G\simeq F/N,$$

而来找出群$G$的恒等关系式. 设$H$是群$F$的含于子群$N$中的所有全特征子群之积；$H$本身是$F$的全特征子群. 如果

$$h=a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$$

是$H$中任意元素，则等式

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1}x_{i_2}^{\varepsilon_2}\cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}=1 \tag{5}$$

是群$G$中的恒等关系式，其中$i_1, i_2, \cdots, i_n$是自然数，并且$i_k=i_l$当且仅当$\alpha_k=\alpha_l$. 实际上，为了在等式(5)中代入$G$中任意元素，也就是对于$N$的任意陪集，须要在它的左侧中代入这些陪集的代表，也就是在诸生成元$a_\alpha$下的某些字. 然而，这样作等价于对元素$h$施行群$F$的一个自同态，这并不能把它引出子群$H$，因而子群$N$之外. 这样，$G$中任意元素都满足等式(5)，这就是说，等式(5)是此群的恒等关系.

反之，若

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1}x_{i_2}^{\varepsilon_2}\cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}=1 \tag{6}$$

是群$G$中任意一个恒等关系式，则在其左侧用$F$中任意元素代入之后我们将得到一个属于正规子群$N$的元素. 实际上它还在$H$中. 这是因为，任意在$F$中选取往(6)中代入的元素，用这种方法所能得到的$N$中的一切元素在$N$中生成一个子群. 易见，这个子群在$F$中是全特征的，因而包含在$H$中. 特别，在(6)中代替未知元素而代入$M$中的一些元素，我们便得$H$中的某个元素$h$，因此恒等关系式(6)属于上一段中描述的群$G$的恒等关系式集中.

从而得到，群$G\simeq F/N$和$F/H$具有相同的恒等关系式. 我们

指出，由于 $H\subseteq N$，故这些群中的第一个同构于第二个的商群.

任意秩自由群关于其全特征子群的商群叫作*导出自由群*. 这样，我们证明了下面的定理.

*任意群 $G$ 同构于某一导出自由群的商群，并且这个导出自由群具有和 $G$ 同样的恒等关系式.*

例如，自由群关于其换位子群的商群，也就是自由阿贝尔群，是导出自由群. 这样，对于阿贝尔群的情况，也就是有恒等关系式(1)的群，我们便得到一个结果，它本质上等价于 §19 中的一个定理：任意阿贝尔群同构于某个自由阿贝尔群的商群.

现在我们看到，*可数秩自由群 $W$ 的任何全特征子群 $H$ 对于某个群 $G$ 起着群 $V_G$ 的作用*，商群 $W/H$ 恰好是以 $H$ 中的元素为自己的恒等关系式的左侧.

这样一来，倘若我们打算按恒等关系式将群分类，继续曾做过的把阿贝尔群类和亚阿贝尔群类区分出来的工作，那末就应当描述可数秩自由群的所有全特征子群. 另一方面，描述所有导出自由群是与刻划任意自由群的全特征子群相联系的. 我们现在来证明关于这些子群的若干个定理.

*自由群 $F$ 的任意全特征子群 $H$，当它不是整个地含于换位子群 $F'$ 中时，就必是它与这个换位子群的交 $K$，$K=H\cap F'$，和群 $F$ 的某个幂 $F^n$，$n\geqslant 1$ 的乘积*(Levi[3], B. Neumann[4]).

设 $(a_\alpha)$ 为群 $F$ 的自由生成元系，注意到商群 $F/F'$ 是具自由生成元 $a_\alpha F'$ 的自由阿贝尔群，可以断言，$H$ 的元和 $F$ 中任何元一样可以表成

$$h=a_{\alpha_1}^{k_1}a_{\alpha_2}^{k_2}\cdots a_{\alpha_s}^{k_s}f' \tag{7}$$

的形式，其中 $f'\in F$，$s\geqslant 0$，所有下标 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 不同，所有指数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 异于 0，若此时 $h\notin F'$，则 $s>0$. 作群 $F$ 的自同态，使 $a_{\alpha_i}$ 不动而将其余的生成元 $a_\alpha$ 变为 1，则元 $h$ 变为元 $a_{\alpha_i}^{k_i}$，因为元 $f'$

中每个生成元的指数和为 0 故 $f'$ 在这个自同态下变为 1. 因此由子群 $H$ 的全特征性就有

$$a_{\alpha_i}^{k_i} \in H, \quad i=1, 2, \cdots, s, \tag{8}$$

而此时 $f' \in H$ 即

$$f' \in (H \cap F') = K.$$

假定 $n$ 为任何生成元 $a_\alpha$ 在 $H$ 中出现的最小正指数；这样的 $n$ 存在，可根据条件 $H \not\subset F'$ 由上述得知. 但是因为存在群 $F$ 的自同态，可将元 $a_\alpha$ 变为此群的任意预先给定的元，故再由 $H$ 的全特征性可知，$F$ 的任意元的 $n$ 次幂在 $H$ 中，即 $H \supseteq F^n$，现在(7)中任何指数 $k_1, \cdots, k_s$ 由(8)皆可被 $n$ 整除，因此

$$a_{\alpha_1}^{k_1} a_{\alpha_2}^{k_2} \cdots a_{\alpha_s}^{k_s} \in F^n,$$

这就证明了等式

$$H = F^n K, \tag{9}$$

即定理证毕.

这一证明中引入的数 $n$，记作 $n(H)$，且当 $H \subset F'$ 时命 $n(H) = \infty$，我们来证明定理：

*若 $F$ 为自由群，$H$ 为其全特征真子群，则导出自由群 $F/H$ 关于它的换位子群的商群是 $n(H)$ 阶循环群的直积；这些循环群直因子的个数等于群 $F$ 的秩.*

实际上，群 $F/H$ 的换位子群为 $HF'/H$，但当 $H \not\subset F'$ 时，由(9)及包含关系 $K \subseteq F$ 可知，等式

$$HF' = F^n F'$$

成立，因此群 $F/H$ 关于它的换位子群的商群同构于商群 $F/F^nF'$，又若 $H \subset F'$，则群 $F/H$ 关于它的换位子群的商群就同构于 $F/F'$，在这两种情形下，这一商群总是阿贝尔群且显然是 $n$ 阶循环群的直积，而循环群的个数等于群 $F$ 的秩. 我们指出，由不等式 $H \neq F$ 可得数 $n = n(H)$ 大于 1.

现在我们可以证明如下的 Baer[32] 定理，它把描述导出自由群的问题完全归结为刻划所有自由群中的一切全特征子群.

任何异于 $E$ 的导出自由群 $G$ 可以唯一地表示成自由群关于它的全特征子群的商群.

实际上，设群 $G$ 容许两种这样的表示法，即

$$G \simeq F/H \simeq \bar{F}/\bar{H},$$

其中 $F$ 和 $\bar{F}$ 为自由群，而 $H$ 和 $\bar{H}$ 分别是它们的全特征子群. 根据上面的定理，群 $G$ 关于它的换位子群 $G'$ 的商群是同一阶数 $n$ 的循环群的直积. 群 $G/G'$ 的任意两个这样的直分解是同构的，这可由 § 24 对有限 $n$ 的结果和 § 19 对 $n=\infty$ 的结果得出，因此，再根据上面定理，自由群 $F$ 和 $\bar{F}$ 有相同的秩，即它们同构.

于是，可以认为在生成元系为 $(a_\alpha)$ 的自由群 $F$ 中给定了两个全特征子群 $H$ 和 $K$，$F$ 关于它们的商群同构

$$F/H \simeq F/K \tag{10}$$

若

$$h = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} a_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$$

为 $H$ 的任一元，则由本节一开始所证，等式

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} = 1$$

(其中 $i_k = i_l$ 当且仅当 $\alpha_k = \alpha_l$)是群 $F/H$ 的恒等关系式. 由同构(10)，它也是群 $F/K$ 中的恒等关系式. 因此在其左边代以 $F$ 中的任意元便得到 $K$ 中的元，特别以元 $a_{\alpha_k}$ 代每个《未知数》$x_{i_k}$ 我们就得出元 $h$，因而，它在子群 $K$ 中. 这样，$H \subseteq K$ 类似地 $K \subseteq H$，因此 $H=K$，此即要证者.

现在说明如何把刻划任意秩自由群 $F$ 的所有全特征子群的问题与对可数秩自由群 $W$ 的相应问题联系起来. 若 $H$ 为群 $F$ 的全特征子群则在 $W$ 中与之对应的是全特征子群 $V_{F/H}$，它由群 $F/H$ 的恒等关系式的左边组成. 若 $K$ 为群 $F$ 的另一个全特征子群，则子群

$V_{F/K}$ 与子群 $V_{F/H}$ 不同：倘若群 $F/H$ 和 $F/K$ 具有相同的恒等关系式，则重复上述定理证明的末尾，我们就会得到 $H=K$. 更进一步，若 $H\subset K$，则还有 $V_{F/H}\subset V_{F/K}$，因为群 $F/H$ 的所有恒等关系式在它的同态象 $F/K$ 中也成立. 反之，若 $V_{F/H}\subset V_{F/K}$，则任取 $H$ 中元 $h$ 如本节一开始所描述的那样，作群 $F/H$ 的，从而也是 $F/K$ 的相应的恒等关系式，我们便得出 $h\in K$，即 $H\subset K$. 这就证明了如下定理(Baer[32]).

*存在任意秩自由群 $F$ 的全体全特征子群集 $L_F$ 到可数秩自由群 $W$ 的全体全特征子群集 $L_W$ 内的一一映射，并且双方保持包含关系.*

*若群 $F$ 的秩无限，则这是集合 $L_F$ 到整个集合 $L_W$ 上的映射.*

事实上，假定 $M=(x_\alpha)$ 为群 $F$ 的自由生成元素，因集 $M$ 无穷，在其中可选出可数子集 $M'=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，我们将认为群 $W$ 与集合 $M'$ 生成的子群重合.

假定 $V$ 为群 $W$ 的任意全特征子群，而 $H$ 为集合 $V$ 生成的群 $F$ 的全特征子群. 若取 $V$ 中的任意元并且在其表示式中以任意方式将 $M'$ 中的元换成 $M$ 的任意元，我们不会越出群 $H$ 之外. 读者不难验证. 用这种方式得出的所有 $H$ 中元自身在 $H$ 中构成一个全特征子群，因而它穷尽了 $H$ 的所有元，这样

$$H\cap W=V.$$

因此群 $W$ 的子群 $V_{F/H}$，它在上面指出的意义下与子群 $H$ 对应，实际上与 $V$ 重合.

而若群 $F$ 的秩 $r$ 有限，则上面定义的集合 $L_F$ 到集合 $L_W$ 的映射已不是映到整个 $L_W$ 上的了. $r=1$ 时这是显然的，因为譬如在 $W$ 中有无限的换位子群列，而在无限循环群中则没有，但也可对其他的 $r$ 证明这一点.

导出自由群和自由群的全特征子群的一系列其他性质可以在 Levi[3], B. Neumann[4], Baer[32]和 Мальцев[9]的工作中找到. 我们要指出, 还未得出非循环自由群的所有全特征子群的完全刻划,即未得到在第十一章意义下对这些子群的格的描述. (参看补充§10).

## §37a. 局部自由群

现在着手研究的一类群,是自由群类的自然推广,而且这类群是足够广泛的. 目前, 这类群的研究还远未完成, 下面叙述的结果的主要部分包括在 Курош[10]中, 还可参见Фукс-Рабинович [2]和 Мальцев[4].

群$G$称为*局部自由群*, 若它的任何一个由有限个元素生成的子群是自由的. 由于 Nielsen-Schreier 定理, 所有的自由群都是局部自由群. 有理数的加群和它的所有子群满足局部自由群的定义. 事实上,在这些群中所有有限子集生成无限循环子群.

局部自由群的每一子群自身也是局部自由的, 特别是局部自由群的每个不等于1的元素有无限阶. 局部自由群的升链的并也是局部自由的. 对于可数群的情况, 这个最后结果的逆命题也是成立的.

*每个可数局部自由群是有限秩自由群的升链并。*

为了证明,只要把已给的群的元素编号,且取第一个元素生成的子群,前二个元素生成的子群等等,就行了. 我们指出, 对于不可数的情况, 是否任何一个不可数局部自由群是自由群的某一升链并,这个问题目前仍没有解决.

*任意多个局部自由群的自由积自身是局部自由的.*

事实上,假设 $G=\prod_{\alpha}^{*}H_{\alpha}$, 在群$G$中假设$M$是给定的有限子集合,$M$中每个元素记为关于群$H_{\alpha}$中元素的有限字.在每一子群

$H_\alpha$ 中把出现在这些字中的元素汇集起来，它们的个数是有限的，即它们在 $H_\alpha$ 中生成自由子群 $H'_\alpha$. 群 $G$ 的由所有的子群 $H'_\alpha$ 生成的子群将是这些子群的自由积，即是自由群. 因而它的子群 $\{M\}$ 也将是自由的.

应该看到局部自由群不可能是单群（参看 Фукс-Рабинович [2]）. 虽然，和自由群不同，局部自由群能够和自己的换位子群相重合.

局部自由群 $G$ 称为*有限秩群*，即*秩为 $n$ 的群*，如果 $n$ 是有下述性质的最小数：群 $G$ 的每个有限子集合包含在具有 $n$ 个自由生成元的自由子群中（如果这样的数存在的话）. 对于自由群，这个定义同在 § 18 中给出的秩的定义一致. 从另一方面看，如果秩为 $n$ 的局部自由群是可数的，但是不是自由的，那末它是秩为 $n$ 的自由群升链的并[1]. 最后，秩为 1 的群显然是阿贝尔群，即和秩为 1 的无扭阿贝尔群相同. 每一个秩大于 1 的局部自由群已是不可交换的.

有限秩的局部自由群是否为可数的，这个问题目前没有解决. 这个问题同上面提出的关于用自由群的升链的并能否得到所有局部自由群的问题有直接的联系. 事实上，有如下的定理.

*不可数自由群的升链的并不可能是有限秩的群。*

**证明：** 假定不可数的局部自由群 $G$ 的秩为 $n$，且同时是自由群的升链

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_k \subset \cdots$$

之并. 在群 $G$ 中能够找到这样的有限子集 $M$，$M$ 不包含在具有比 $n$ 少的生成元的子群中. 另一方面，将 $G$ 中任意一个元素 $a$ 并入 $M$ 所得到的子集合，应该包含在某一有 $n$ 个生成元的自由子群中，

---

1）然而，当 $n>1$ 时，这个群还可以作为具有 $m$ 个生成元的自由群的升链的并而得到，其中 $m$ 为大于 $n$ 的任意正整数.

并且这个子群将同样地包含在从某一个编号 $k$ 开始的所有群 $W_k$ 中. 由群 $G$ 的不可数性, 而群 $W_k$, $k=1, 2, \cdots$ 所组成集合的可数性, 可得出存在这样的 $k$ 和 $G$ 中的这样的不可数子集 $P$, 由于将 $P$ 的任何一个元素并入 $M$ 而得到的任何集, 已经在群 $W_k$ 中, 包含在有 $n$ 个生成元的自由子群中. $M$ 中的任意元素通过子群 $W_k$ 的有限个自由生成元表示, 所以 $M$ 包含在这个群的可数自由因子 $A$ 中. 在集合 $P$ 中, 由于它不可数, 能够找到不在子群 $A$ 中的元素 $b$, 由集合 $M$ 和元素 $b$ 组成的集合 $M'$ 包含在有 $n$ 个生成元的自由子群 $B$ 中, 并且 $B\subset W_k$. 在 § 34 中, 证明自由积的子群定理时运用的构造法能说明 $A\cap B$ 将是 $B$ 的自由因子. 可是, 这个交包含集合 $M$, 所以具有不少于 $n$ 个自由生成元, 这与 $B$ 不同于 $B\cap A$ 相矛盾.

对于局部自由群的秩, 我们证明下面的两个定理.

*具有有限秩的两个局部自由群的自由积的秩是有限的且等于其因子的秩的和.*

事实上, 设群 $G$ 是群 $A$ 和 $B$ 的自由积. 且 $A$ 有秩 $r$, $B$ 有秩 $s$. 群 $G$ 中任意有限子集 $M$ 的元素可由群 $A$ 和 $B$ 的有限个元素写出. 因此, 可以找到这样的自由子群 $A'\subset A$, $B'\subset B$, 它们的秩分别为 $r$ 和 $s$, 且 $A'$ 和 $B'$ 的自由积包含 $M$. 子群 $A' * B'$ 是秩为 $r+s$ 的自由群, 因此, 证明了群 $G$ 的秩不大于 $r+s$. 从另一方面来说, 在子群 $A$ 中取有限子集 $M_1$, 它不含于秩小于 $r$ 的自由子群中; 相应地在子群 $B$ 中选出子集 $M_2$. 群 $G$ 中包含集合 $M_1$ 和 $M_2$ 的任何一个自由子群 $C$, 根据 § 34, 可以分解成自由积, 其因子既有 $C\cap A$, 又有 $C\cap B$. 因此, 子群 $C$ 的秩不小于 $r+s$.

*如果秩为 $n$ 的局部自由群 $G$ 同态(但不同构)地映到局部自由群 $\bar{G}$ 上, 则群 $\bar{G}$ 的秩有限且小于 $n$.*

事实上, 在群 $\bar{G}$ 中取任意的有限子集 $\bar{M}$, 在群 $G$ 中取一有限

子集$M$，它包含$\overline{M}$的每个元的一个原象，还含有一个异于单位元的元，后者映成$\overline{G}$的单位元.集合$M$含于$n$秩自由子群$A$中. 群$G$的子群$A$的象集合$\overline{A}$是具有有限生成元的子群，因此是自由群. 并且子群$\overline{A}$的秩不大于$n$，但由 Грушко 定理推论可得(参看§ 39)，它也不可能等于$n$，因为$A$同态地映到$\overline{A}$上而不是同构. 子群$\overline{A}$含有已知集合$\overline{M}$，因此群$\overline{G}$的秩小于$n$.

从这个定理推出，*有限秩的局部自由群不可能和它的一个真商群同构*.

局部自由群的性质许多地方都与无扭阿贝尔群相似. 事实上，下面的一些定理表示在这两类群中存在着紧密的联系[1].

*局部自由群$G$关于它的换位子群$K$的商群$G/K$是无扭阿贝尔群. 如果群$G$的秩有限且等于$n$，则商群$G/K$的秩不大于$n$.*

事实上，若商群$G/K$含有不等于1的有限阶元素，则在群$G$中，可找到这样的元素$a$，$a\notin K$而$a^m\in K$，$m>1$，即

$$a^m=\prod_{i=1}^{K}a_i^{-1}b_i^{-1}a_ib_i$$

由元素$a$和所有元素$a_i$与$b_i$，$i=1, 2, \cdots, k$，组成的集合在群$G$中生成自由子群，它的换位子群包含$a^m$但不包含元素$a$. 但这与自由群关于它的换位子群的商群是阿贝尔群相矛盾. 定理的另一半由以下证明可得：在群$G$到$G/K$的自然同态对应下，群$G$的任何一个具有$n$个生成元的子群都对应着商群$G/K$中生成元不超过$n$的一个子群，且商群$G/K$中任何一个有限子集被包含在这样一个子群中.

必须指出，商群$G/K$的秩可能小于群$G$的秩. 例如，已经指出，在某些情况下，局部自由群的换位子群和这个群本身相同.

---

1）在这些定理中谈到阿贝尔群的秩时，我们指的是 § 19 给出的定义.

任一无扭阿贝尔群 $A$ 同构于某局部自由群 $G$ 关于它的换位子群的商群. 如果群 $A$ 的秩是有限的并等于 $n$, 那么在关于其换位子群的商群为 $A$ 的局部自由群中间, 存在秩为 $n$ 的群.

**证明**: 群 $A$ 是递增群列的并:

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots \tag{1}$$

此处每一个群 $A_k$ 可分解成某些无限循环群的直积[1].

令元素 $a_{k\alpha}$ 组成群 $A_k$ 的基, 这些 $\alpha$ 历遍某个集合 $\mathfrak{M}_k$. 由(1), 任一个元素 $a_{k\alpha}$ 等于一些元素 $a_{k+1,\beta}$, $\beta \in \mathfrak{M}_{k+1}$ 的幂的乘积, 即:

$$a_{k\alpha} = w_{k\alpha}(a_{k+1,\beta}), \qquad \alpha \in \mathfrak{M}_k \quad k=1,2,\cdots \tag{2}$$

并且,关系式(2)完全地确定了(1)式中的嵌入. 同时,它与可换性的关系式一起组成了群 $A$ 的定义关系式组. 如果 $G$ 是一个生成元为符号 $a_{k\alpha}$, $\alpha \in \mathfrak{M}_k$ $k=1,2,\cdots$, 而定义关系式为(2)的群, 那么群 $G$ 关于它换位子群的商群同构于群 $A$. 我们将证明, 群 $G$ 是局部自由的.

我们固定某个 $k$ 并取具自由生成元 $b_\beta$, $\beta \in \mathfrak{M}_{k+1}$ 的辅助自由群 $W$. 如果这个群的元素

$$c_\alpha = w_{k\alpha}(b_\beta), \quad \alpha \in \mathfrak{M}_k$$

亦即在固定的 $k$ 下, 在等式 (2) 的右侧用相应元素 $b_\beta$ 替换元素 $a_{k+1,\beta}$ 所得到的字, 不是由它们所生成的子群的自由生成元, 那么设有某个关系, 它把元素 $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \cdots, c_{\alpha_s}$ 联系起来. 此时群 $W$ 的子群 $\{c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \cdots, c_{\alpha_s}\}$ 是自由的, 并且(参看§ 39)由Грушко 定理的推论, 它的秩小于 $s$. 不过, 在这种情况下, 在群 $A$ 的子群 $\{a_{k\alpha_1}, a_{k\alpha_2}, \cdots, a_{k\alpha_s}\}$ 中可以找到少于 $s$ 个元素的生成元系, 这点与自由阿贝尔群的秩等于生成元的最小个数是矛盾的.

我们得到, 群 $G$ 是递增自由群的序列的并, 因此是局部自由

---

1) 我们假设在群 $A$ 中的运算是乘法.

的，并且它关于换位子群的商群同构于 $A$；此外，如果群 $A$ 的秩等于 $n$，那么群 $G$ 是秩 $n$ 的自由群组成的递增列的并，即它的秩不大于 $n$. 但由于上述的定理，它也不能够小于 $n$. 这样就证明了定理.

我们确定了的局部自由群同无扭阿贝尔群之间的联系，可以用它来证明*不可分解为自由积的任意有限秩局部自由群的存在性*，对此，只需把群 $A$ 取作不可分解为直积的秩为 $n$ 的无扭阿贝尔群就行了，而这样的群的存在性在§32c中被证明了. 秩为 $n$ 的局部自由群 $G$，对它说来群 $A$ 是它关于换位子群的商群，将不能分解为自由积. 事实上，若某个群能分解为自由积，则由此可得，它的关于换位子群的商群可表为直积的形式. 在一般情况下，这个直分解的因子之一可能等于 $E$，不过在我们所讨论的情况中，由于群 $A$ 和 $G$ 的秩的相等，这点是不可能的.

也可以用别的方法(参看 Курош(10)) 证明具任意无限势的不可分解为自由积的局部自由群的存在性.（参看补充9.6).

*所有势为 $\mathfrak{m}$ 的群的集合之势*，正如在§5中所指出过的，所有不同构的有限群的集合之势是可数的. 自然地产生关于具有无限势 $\mathfrak{m}$ 的所有不同构群集合之势的问题. 本章得到的结果能够对这个问题给出下面的回答(Курош[9]).

*具无限势 $\mathfrak{m}$ 的所有不同构的群的集合有势 $2^{\mathfrak{m}}$，即势为 $\mathfrak{m}$ 的集合的所有子集之势.*

首先指出，任意一个势为 $\mathfrak{m}$ 的群是同一势的自由群 $W^{\mathfrak{m}}$ 的商群，因此所有不同构的势为 $\mathfrak{m}$ 的群的集合之势不大于 $W^{\mathfrak{m}}$ 的所有正规子群集之势，而这个势本身不大于 $W^{\mathfrak{m}}$ 的所有子集作成的集合之势，即不大于 $2^{\mathfrak{m}}$.

我们证明"势不小于 $2^{\mathfrak{m}}$"之前，先证下面引理.

**引理：** *如果给定一个由群 $A_\gamma$，$A_\delta$，… 组成的势为 $\mathfrak{m}$ 的集合*

$\mathfrak{M}$，其中每个群有不超过 $\mathfrak{m}$ 的势，那么这些群的自由积的势是 $\mathfrak{m}$.

事实上，在这个自由积中选择这样一些字，它的长为 $n$，而第一个元素属于 $A_{\gamma_1}$，第二个元素属于 $A_{\gamma_2}$，…，第 $n$ 个元素属于 $A_{\gamma_n}$. 所有这种字的集合 $M(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ 的势等于群 $A_{\gamma_1}$、$A_{\gamma_2}$，…，$A_{\gamma_n}$ 势的乘积，因此不大于 $\mathfrak{m}^n=\mathfrak{m}$. 另一方面，对给定 $n$，所有形为 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 的足标系，其中相邻足标 $\gamma_i$ 与 $\gamma_{i+1}$ 不同，而 $\gamma_i$ 为任意，它们所组成的集合有势 $\mathfrak{m}^n=\mathfrak{m}$；因此，对所有的 $n$，一切这样的足标系集合也有这样的势. 于是诸群 $A_\gamma$ 的自由积全体分解为 $\mathfrak{m}$ 个互不相交子集 $M(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$，因而有不小于 $\mathfrak{m}$ 的势，但又不大于 $\mathfrak{m}^2=\mathfrak{m}$. 引理得证.

我们回到定理的证明，并将进一步证明下面断言.

*不可分解为自由积的所有不同构的无限势 $\mathfrak{m}$ 的群的全体，其势为 $2^{\mathfrak{m}}$.*

根据上面的讨论，只要证明：我们所要求的势不小于 $2^{\mathfrak{m}}$. 在证明中，我们将用到所有势可以按递增的顺序赋以良序. 即我们能够关于这个良序的集合进行归纳证明.

首先考虑无限势中最小的势——可数势的情况. 取一切可能的互不相同的素数之无限系组成的集合 $P$——这个集合有连续统的势，即可数集的所有子集组成的集合之势——我们把 $P$ 中每一个序列对应一个素数阶循环群的直积，其中每个循环群的阶出现在这个序列中. 我们得到可数群的连续统势的集合，并且这些群是阿贝尔群，因此不可分解为自由积. 这些群中没有互相同构的，因为对于任意两个这样的群，必有某一个群含有某素数阶的元，而在另一个群中没有.

现在假设对于一切小于 $\mathfrak{m}$ 的势，断言已证. 由此得出，如果我们取所有不可分解为自由积并势小于 $\mathfrak{m}$ 的互不同构的群集合，那么这个集的势大于或等于 $\mathfrak{m}$. 事实上，如果对于一切小于 $\mathfrak{m}$ 的

$\mathfrak{m}$，势为 $2^{\mathfrak{m}}$ 的集合之并有势 $\mathfrak{m}'$，$\mathfrak{m}'<\mathfrak{m}$，那么我们就将导出矛盾，因为在这个并集中，含有势为 $2^{\mathfrak{m}'}$ 的集合，而 $2^{\mathfrak{m}'}>\mathfrak{m}'$。由此我们可以选出某个势为 $\mathfrak{m}$ 的集合 $\Pi$，而它的元素是势小于 $\mathfrak{m}$ 的不可分解为自由积的群，并且这些群之间互不同构。

现在我们在 $\Pi$ 中取一切可能的势为 $\mathfrak{m}$ 的子集，并建立每一个这种子集中所有群的自由积。我们得到 $2^{\mathfrak{m}}$ 个群，根据引理，它们中的每一个群有势 $\mathfrak{m}$，而由群之分解为不可分解的子群的自由积的同构定理（§35）可以得出，这些群之间互不同构。我们还可以看出，这些群由于可分解成自由积，所以没有中心而且还不可分解为直积（参见§35）。现在我们取已得到的 $2^{\mathfrak{m}}$ 个群中的每一个与 3 次对称群作直积。新的群不可分解为自由积，并且也没有中心，因为正如我们将在§45中指出的那样，无中心群只能有唯一的不可分解因子的直积分解，所以在这些构造出的群之间更没有同构的。于是我们得到了 $2^{\mathfrak{m}}$ 个势为 $\mathfrak{m}$ 的不可分解为自由积的互不同构的群。

后来 Куликов[4]指出，所有不同构的具有无限势 $\mathfrak{m}$ 的阿贝尔群的集合已经有势 $2^{\mathfrak{m}}$（参看补充 2.4）。

# 第十章　具有限个生成元的群

## § 38. 具有限个生成元的群的一般性质

在 § 6 所引入的具有限生成元的群是有限群的一个自然推广. 在 § 20 中，已建立了具有限生成元的阿贝尔群的完整的理论. 但在一般情形下，研究具有限生成元的群是相当困难的，此研究也是远未完成的有限群的理论困难得多. 我们将指出这些困难的原因.

象在 § 5 中所指出那样，所有不同构的有限群的集合是可数的，由 § 20 的结果还推出互不同构的具有限生成元的阿贝尔群集合的可数性. 与此相反，所有具有限生成元的一般的群的集合有连续统势，这个势不可能更大，因为这些群都是可数的，而且，下面的定理是正确的. (B. Neumann[57]).

*有两个生成元的所有不同构群的集合有连续统势.*

在 § 9 (引理 1)中证明过，含于 $n$ 次交错群中的所有 3 循环在 $n\geqslant 3$ 时是这个群的生成元系. 现在，我们证明，$n$ 为奇数时，$a=(12\cdots n)$，$b=(123)$ 也是 $n$ 次交代群的生成元系. $n=3$ 时是显然的，因此，设 $n\geqslant 5$，我们指出置换 $a$ 的偶性可由数 $n$ 的奇性推出.

容易验证，因为在 $3\leqslant i<n$ 时有

$$ba^{-1}(12i)ab^2=(1,2,i+1),$$

则含有置换(123)的子群$\{a, b\}$含有所有$(12i)$形式的 3 循环$(3\leqslant i\leqslant n)$，因此，也包含它的逆元 3 循环 $(1i2)$. 若 $i\neq j, i\geqslant 3, j\geqslant 3$，则

$$(12j)(12i)(1j2)=(1ij),$$

即子群$\{a, b\}$含有所有 3 循环$(1, i, j)$.

最后，若记号 $i, j, k, l$ 彼此不同，且不等于 1，则

$$(1li)(1jk)(1il)=(ijk)$$

即子群$\{a, b\}$含有所有 $n$ 次 3 循环，因此，它与交代群本身重合.

设

$$(U) \qquad u_1<u_2<\cdots<u_n<\cdots$$

是奇数的递增序列，此处 $u_1\geqslant 5$，设 $G'_U$ 是有限个次数在$(U)$中的交错群的直积

$$G'_U=A_{u_1}\times A_{u_2}\times\cdots\times A_{u_n}\times\cdots$$

任何一个群 $A_{u_n}$ 是记号 $\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \cdots, \sigma_{n,u_n}$ 形成的偶置换群，并且，$a_n=(\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \cdots, \sigma_{n,u_n})$和 $b_n=(\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\sigma_{n_3})$如上面所示是这个群的生成元. 如果 $\Sigma$ 是所有记号 $\sigma_{nk}$的集合，$k=1, 2, \cdots, u_n$，$n=1, 2, \cdots$；则群 $G'_U$ 是 $\Sigma$ 到自身上的所有一一映射的群的子群. 另一方面，在后一个群中，取子群 $G_U$，它由下列元素生成：

$$a=(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \cdots, \sigma_{1,u_1})(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \cdots, \sigma_{2,u_2})\cdots$$
$$(\sigma_{n_1},\sigma_{n_2},\cdots, \sigma_{n,u_n})$$
$$b=(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})\cdots(\sigma_{n_1},\sigma_{n_2},\sigma_{n_3})\cdots$$

我们来证明：$G_U\supset G'_U$

事实上，直接验证表明，当 $m<n$ 时，元素 $a_n^{-(u_m-2)}ba_n^{u_m-2}$ 与 $b$ 可换，而 $m=n$ 时不可换. 因为在元素 $a$ 和 $b$ 的幂的任意乘积中，含有具同一第一足标 $n$ 的符号 $\sigma_{n_i}$ 的那些循环，它们之间的相乘，和在群 $A_{u_n}$ 中是完全一样，故我们得到，元素 $a^{-(u_m-2)}ba^{u_m-2}$ 与 $b$ 的换位子 $k_m$ 当 $n>m$ 时，保持所有符号 $\sigma_{n_i}$ 不动，但却变动符号 $\sigma_{m_i}$ 以及可能还变动一些 $\sigma$，其第一足标较 $m$ 为小. 换句话说，元素 $k_m$ 含于子群 $A_{u_m}$ 与子群 $A_{u_s}$，$(s<m)$中的某些个的直积中. 这对任一个在群 $G_U$ 中与 $k_m$ 共轭的元都是正确的. 因为用 $G_U$ 中的

任何一个元作共轭变形时，$A_{u_n}$ 中的元 $x$ 仍变到属于 $A_{u_n}$ 中的元．因此，在群 $G_U$ 中元素 $k_m$ 生成的正规子群整个含于直积 $A_{u_1}\times A_{u_2}\times\cdots\times A_{u_m}$ 中．这个正规子群在直因子 $A_{u_m}$ 中的分量是 $A_{u_m}$ 中不等于$E$的正规子群，由于这个群的单纯性，它和 $A_{u_m}$ 相等．如果认定群 $A_{u_1},\cdots,A_{u_{m-1}}$ 包含在 $G_U$ 中是已被证明的，（在 $m=1$ 这点是显然的．）则我们得到 $A_{u_m}$ 含于 $G_U$，由此可得，所有子群 $A_{u_n}$ 包含在群 $G_U$ 中，且都是 $G_U$ 中的正规子群．

另一方面，假定在群 $G_U$ 中取任意有限的正规子群 $H$，$H$ 中任一元 $h$ 必对应着$A_{u_n}$ 中的一个元素，它对符号 $\sigma_{n_1},\sigma_{n_2},\cdots,\sigma_{n,u_n}$ 完成的置换与元素 $h$ 相同．这些$H$中元素的"分量"组成子群 $A_{u_n}$ 中的一个正规子群，由于子群 $A_{u_n}$ 的单纯性这个正规子群或者等于 $A_{u_n}$ 或者等于 $E$．由于子群$H$的有限性，故从某个数 $n+1$ 开始，总是上述两种可能性的第二种出现，换句话说，正规子群 $H$，保持所有 $\sigma_{k_i}(k>h)$是不动的，因此，含于直积

$$A_{u_1}\times A_{u_2}\times\cdots\times A_{u_n}$$

并且子群$H$在 $A_{u_n}$ 中的分量和这些直因子本身重合．

现设正规子群$H$和某个交错群 $A_k(k\geqslant 5)$同构．显然，子群 $H$ 由于单纯性，就和 $A_{u_n}$ 中它自己的分量同构，即和子群 $A_{u_n}$ 本身同构．由之有 $k=u_n$，由上所证，我们得到，群 $G_U$ 有同构于交错群 $A_k$ 的有限正规子群当且仅当 $k$ 等于$U$中某个 $u_n$．

形如$U$的不同序列的集合有连续统势．若 $U_1$ 与 $U_2$ 是这样序列中的两个．那么，由上面所述可得，$G_{U_1}$ 和 $G_{U_2}$ 不可能同构．因而，我们得到，具两个生成元的不同构群的集合有连续统势．定理得证．

由这个定理推出，不存在这样"泛"可数群，使得任何一个可数群能同构于它的某个子群．因为，显然，任何一个可数群仅含可数多个有两个生成元的子群．关于是否存在这样的连续统势的群，

使得有同样势的任意群都能同构于它的某个子群的问题[1]，至今仍未解决.

还可指出，具有限生成元的群难以洞察的另一些理由，它们和上面所证定理没有直接联系. 先讲下面的一些引理，这些引理本身也有独立的意义. （参看 Higman, B. Neumann, H. Neumann [1]）.

**引理 1.** *设在群 $G$ 中给出彼此同构的两个子群 $A$ 和 $B$, 并设 $\varphi$ 是从 $A$ 到 $B$ 的同构对应，则群 $G$ 可以嵌入某个群 $H$，而使在 $H$ 中可找到元素 $h$, 用它去将子群 $A$ 变形可得同构对应 $\varphi$:*

$$h^{-1}ah=a\varphi \qquad \text{对一切 } a\in A.$$

事实上，看自由积 $K=G*\{u\}$，$L=G*\{v\}$ 这里 $\{u\}$ 和 $\{v\}$ 是无限循环群，从 §34 的结果推出，对群 $K$ 的子群 $U=\{G, u^{-1}Au\}$ 有自由分解式

$$U=G*u^{-1}Au$$

而对群 $L$ 的子群 $V=\{G, vBv^{-1}\}$ 也有自由分解式

$$V=G*vBv^{-1}.$$

我们得到从群 $U$ 到群 $V$ 的同构对应 $\psi$，如果令

$$g\psi=g \qquad \text{对一切 } g\in G,$$

$$(u^{-1}au)\psi=v(a\varphi)v^{-1} \qquad \text{对一切 } a\in A.$$

因此可以构造有相重子群的群 $K$ 和 $L$ 的自由积 $H$，将子群 $U$ 和 $V$ 在同构对应 $\psi$ 下粘合在一起. （参看 §35）群 $H$ 包含 $G$ 作为子群. 从另一方面说来，因为在 $H$ 中有

$$u^{-1}au=v(a\varphi)v^{-1} \qquad \text{对一切 } a\in A,$$

那么，

$$(uv)^{-1}a(uv)=a\varphi,$$

即元素 $uv$ 是所求的元素 $h$.

---

1）在撰写第三版时此问题已得到解决（参看补充 1.2）.

**引理 2.** 令在群 $G$ 中给了子群 $A_\alpha$($\alpha$ 跑遍某个指标集 $M$)，并对每一个 $\alpha$ 给了子群 $A_\alpha$ 到某个子群 $B_\alpha$ 的同构映射，那么群 $G$ 可嵌入某个群 $H$，使得对每一个 $\alpha$ 可在 $H$ 中找到一个元素 $h_\alpha$，用它去将子群 $A_\alpha$ 变形而产生映射 $\varphi_\alpha$，此时可以认为：元素 $h_\alpha$，$\alpha\in M$ 在群 $H$ 中生成自由子群，且是它的自由生成元.

我们用下面的方法确定群 $H$：$H$ 的生成元是群 $G$ 的生成元以及符号 $h_\alpha$. $\alpha\in M$, $H$ 的定义关系式是群 $G$ 的定义关系式和所有等式

$$h_\alpha^{-1}a_\alpha h_\alpha=a_\alpha\phi_\alpha,\quad \text{其中 } a_\alpha\in A_\alpha,\quad \alpha\in M \tag{1}$$

(元素 $a_\alpha$ 和 $a_\alpha\varphi_\alpha$ 当然可假定是通过群 $G$ 的生成元来表示的.)元素 $h_\alpha$ 实际上是在 $H$ 中由它们生成的子群的自由生成元. 这是因为，假设群 $G$ 的所有生成元等于单位元，这就使关系(1)变成恒等式，因此，从它们以及从群 $G$ 的关系式不能得出非平凡的仅含元素 $h_\alpha$ 的关系式.

另一方面，如果群 $G$ 的生成元在群 $H$ 中被某个关系式联系起来，而这个关系式不是从群 $G$ 的定义关系式中得出来的. 那么，这个关系式可在添某有限个元素 $h_\alpha$ 以后获得. 如果这些元素 $h_\alpha$ 是根据引理 1 逐个添入到群 $G$ 中，则此关系式就更应该是被满足的，但这是不成立的. 这样一来，由于群 $H$ 包含群 $G$ 为其子群，因此满足引理 2 的所有要求. 为了以后我们再次指出，群 $H$ 的生成元 $h_\alpha$ 只在关系式(1)中出现.

对所有 $\alpha$ 取 $A_\alpha=G$，而取 $\varphi_\alpha$ 为群 $G$ 的所有自同构，对此情况我们应用引理 2，得到群 $H$，它与群 $G$ 的全形起同样的作用.

下面的定理是我们的目的，这定理在本书第一版中以问题的形式提出过，并在 Higman G, Neumann B. H., Neumann H[1] 中被证明了.

任意可数群 $G$ 可以同构地嵌入具两个生成元的群中[1].

**证明:** 在群 $G$ 中取一生成元系: $g_1, g_2, \cdots$ 有限或者可数, 其次令:

$$K = G * \{u\}. \tag{2}$$

此处 $\{u\}$ 是无限循环群. 作为群 $K$ 的生成元系可取元素 $u$ 及

$$u_i = ug_i, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

因为有 $g_i = u^{-1}u_i$, $i = 1, 2, \cdots$. 所有元素 $u_i$ 的阶是无限的, 即由它们生成的循环子群是同构的. 因此由引理 2, 群 $K$ 可以嵌入这样的群 $L$ 中, 使得在群 $L$ 中可以找到 $h_i$, $i = 1, 2, \cdots$, 满足条件

$$h_i^{-1}uh_i = u_i, \quad i = 1, 2, \cdots; \tag{4}$$

此外, 元素 $h_i$ 是由它们所生成的子群 $H$ 的自由生成元, 这些 $h_i$ 只在群 $L$ 的定义关系式(4)中出现, 并同群 $K$ 一起生成整个群 $L$. 由(4)可以认为元素 $u$ 和 $h_i (i = 1, 2, \cdots)$ 是群 $L$ 的生成元系.

现在, 令 $W$ 是两个生成元 $x, y$ 的自由群, 如我们在 §36 中知道的, 在群 $W$ 的换位子群中可找到子群 $S$, $S$ 有自由生成元 $s_1, s_2, \cdots$ (有限或可数), 其个数与我们的元素 $h_i (i = 1, 2, \cdots)$ 同样多. 因此, 借助于等式

$$h_i = s_i, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{5}$$

粘合群 $L$ 和 $W$ 中同构的子群 $H$ 和 $S$, 就可以取 $L$ 和 $W$ 的具有相重子群的自由积 $Q$, 由(5), 元素 $u, x, y$ 生成群 $Q$.

我们来证明, 元素 $u$ 和 $x$ 在群 $Q$ 中不被任何关系式联系. 事实上, 由于(2)存在群 $K$ 到无限循环群 $\{\bar{u}\}$ 的一个同态映射, 它把 $u$ 变成 $\bar{u}$, 而把 $G$ 中所有元素变成单位元, 因此按(3), 它把所有元素 $u_i (i = 1, 2, \cdots)$ 变为 $\bar{u}$. 这个同态可以扩大为群 $L$ 到群 $\{\bar{u}\}$ 的一个同态映射, 在这个映射下元素 $h_i (i = 1, 2, \cdots)$ 变成单位元, 这是因为

1) 对有限群, 这个定理在 §5 中实际上已被证明, 因为由 §6 中例 2 知: 任意有限对称群具有两个生成元.

它们仅在关系式(4)中出现，而这些关系式在这个映射下没有被破坏. 从另一方面看，存在自由群$W$到无限循环群$\{\bar{x}\}$的一个同态映射，它把$x$变到$\bar{x}$而把$y$变成单位元；换位子群的全体元素，特别所有元素$s_i$, $i=1,2,\cdots$，在这个映射下也变成单位元. 现在可以确定群$Q$到自由群$\{\bar{u}\}*\{\bar{x}\}$的一个同态映射$\varphi$，如上面所指出的那样，把$L$映到$\{\bar{u}\}$上而把$W$映到$\{\bar{x}\}$上. 事实上，在相粘合的子群$H$和$S$上，这些映射是一致的，因为这两个子群都对应到单位元. 映射$\varphi$使元素$u,x$对应到自由群的自由生成元$\bar{u},\bar{x}$，因此$u$和$x$实际上在群$Q$中不能被任何关系式联系.

这么一来，我们在群$Q$中有两个秩为2的自由子群，即$\{x,y\}$和$\{u,x\}$. 按引理1，可以使群$Q$嵌入群$R$，而$R$是在$Q$中添加元素$z$所生成的，其中$z$满足$z^{-1}xz=u$, $z^{-1}yz=x$，从而$zxz^{-1}=y$. 由此得出元素$u$、$x$、$y$、$z$生成的群$R$实际上是具两个生成元的. 由此得出元素$u$、$x$、$y$、$z$生成的群$R$实际上是具两个生成元$x$和$z$的群，定理被证明(见补充15.1).

关于具有限生成元的群已经知道一系列本质上是否定的结果. 例如存在具有限个生成元的群与自己的真商群同构. (B. Neumann[9], Higman[2])这就给著名的称之为Hopf问题(见补充15.1)以否定的解答. 我们注意到，对有限秩的自由群，则有相反的论断，这将在下一节中证明. 还知道，具有限个生成元的无限单群存在，(Higman[3])——这就对本书第一版中提出的一个问题给了回答.

至今下面很重要的Burnside问题还远没解决：*任意具有限个生成元的周期群是有限的吗*[1]*？这个问题即使在群的元素的阶全体有界的条件下也没有解决.* 显然，当群的所有不等于1的元素的

---

1) 在准备本书第三版时，此问题已解决(见补充§16).

阶等于 2 的情况下，可以获得正面的解答. 因为这样的群一定是阿贝尔的. Burnside[2]对当元素的阶等于 3 的情形，以及对两个生成元的群而它的所有元素的阶等于 4 或 4 的因子的情形也找到正面的解答，这两种情形中的第一种在 Levi 和 Van-der-Waerden [1]中也被研究了. 进一步，B. Neumann[3]解决了元素的阶不高于 3 的群的情形，最后 Санов[1]对任意有限个生成元的群而它的所有元素的阶不高于 4 的情形也解决了. 不过，对两个生成元的群，其一切不等于 1 的元素的阶等于 5 时，问题仍待解决. 我们看到，所有这些群是有两个生成元的导出自由群 $B_5$ 的商群，$B_5$ 是由附加恒等关系式 $x^5=1$ 而得到的 (参看 § 37). 人们企图估计群$B_5$ 的有限商群的阶的上界，但到目前还没有得到结果(见补充 § 16). Санов[3]指出，为了正确解决元素的阶全体有界的情况下的Burnside 问题，只要对有两个生成元的群解决就行了.

我们在本节最后证明下面定理(M. Hall[4]):

*具有限个生成元的群仅有有限个具给定的有限指数 $j$ 的子群.*

事实上，给定群 $G$ 而其生成元是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，$U$ 是 $G$ 中指数为 $j$ 的子群，以

$$K_1=U, K_2, \cdots, K_j \tag{6}$$

表示群 $G$ 对子群 $U$ 的所有右陪集. 如果 $g$ 是 $G$ 中任意元素，则从组(6)转为组 $K_1g, K_2g, \cdots, K_jg$ 的变换是组(6)的一个置换，我们以 $P(g)$ 表示它，这么一来，我们得到群 $G$ 到 $j$-阶对称群 $S_j$ 的映射

$$\varphi: \quad g\varphi=P(g) \quad g\in G \tag{7}$$

由等式:

$$P(g_1g_2)=P(g_1)\cdot P(g_2)$$

知此映射是同态的，同态 $\varphi$ 完全由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的象所确定，

因此仅存在群$G$到群$S_j$内的有限个不同的同态，即不超过$(j!)^n$个．但是(7)中引入的同态$\varphi$唯一地确定子群$U$，这是因为元素$g$包含在$U$中当且仅当$P(g)$保持陪集$K_1$不动．因此，具$n$个生成元的群$G$包含不多于$(j!)^n$个指数$j$的子群．

## §39. Грушко 定理

现在我们转到研究具有限个生成元的群的自由分解，这种分解由于同组合拓扑学某些问题的联系而有特殊的意义．在这里能提出的所有问题实质上由本节和下节中证明的Грушко定理［2］(见补充7.2)概括无遗．

设群$G$有生成元系

$$\bar{g}_1, \bar{g}_2, \cdots, \bar{g}_n, \tag{1}$$

这里不假设它们一定互不相同或不等于单位元．如果群$G$的元素$h$有一种用生成元系(1)表示的记法，而在这种记法下不出现$\bar{g}_j$，那么用元素$h\bar{g}_j$或元素$\bar{g}_jh$代替$\bar{g}_j$，我们显然又得到了一个群$G$的生成元系．另一方面，用$\bar{g}_j^{-1}$代替(1)中的$\bar{g}_j$，同样得到一个生成元系．由(1)经有限次上述形式的替换而得到的群$G$的任何一个生成元系，称为*可容许的*(关于生成系(1))．

今设群$G$分解为自由积

$$G = A_1 * A_2 * \cdots * A_k. \tag{2}$$

在下面，群$G$中的元素的最简表达式，它的长度，左半，中心元，右半等等都是对于自由分解(2)而言的．

一个容许的生成元系称为*极小的*，如果这个系的元素长度之和，即这个系的*长*，不大于群$G$的任何别的(关于生成元系(1)的)容许生成元系之长．

**Грушко 定理．** *任何一个极小容许生成元系的每一个元素都含在分解式(2)的一个自由因子里．*

在证明这个定理之前，我们指出由它引出的推论.

*具有限个生成元的群的生成元的最小个数等于这个群的任何一个自由分解式中所有因子的相应个数之和.*

事实上，如果(1)是群$G$的具有最小元素个数的生成元系，(2)是这个群的一个给定的自由分解，而

$$g_1, g_2, \cdots, g_n \tag{3}$$

是关于生成元系(1)的极小容许生成元系，那么根据Грушко定理，(3)中属于自由因子$A_i(i=1, 2, \cdots, k)$的那些元素组成$A_i$的一个生成元系，显然，因子$A_i$不能有元素更少的生成元系[1].

由此得出，*含有$n$个生成元的群的自由分解由个数不大于$n$的因子组成，因此，任何一个具有限个生成元的群可分解为有限个不可分解群的自由积.*

由Грушко定理还可引出另外性质的推论. 在群$G$中，任意选择由$n$个生成元组成的生成元系，显然它对应着一个具有$n$个自由生成元的自由群到这个群$G$上的同态映射. 在自由群的情况下，上面研究过的生成元系的变换给出了由一个自由生成元系到另一个自由生成元系的过渡. 因此，由Грушко定理引出一个实质上与它等价的定理.

*如果具有限个生成元的自由群$S$同态映射到群$G$上，而群$G$可分解为子群$A_1, A_2, \cdots, A_k$的自由积，那末在$S$中可以找到这样的自由生成元系，在所论的同态下，每个生成元映到某一个自由因子$A_i$内.*

由此得出，*$n$秩自由群不能有元素个数少于$n$的生成元系.* 其实，当我们把它映到关于换位子群的商群上时，便可直接得到这个结果.

---

1) 这个推论的证明也在B. Neumann[8]给出.

$n$ 秩自由群的任何一个由 $n$ 个元素组成的生成元系是一个自由生成元系.

事实上,如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是自由群 $S$ 的自由生成元系,而 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是这个群的一个由 $n$ 个元组成的生成元系,那么根据 Грушко 定理,存在一个生成元系 $b'_1, b'_2, \cdots, b'_n$,它关于 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是容许的,并且任何一个 $b'_i$ 在子群 $\{a_j\}$ 之一里面.因为在每个子群 $\{a_j\}$ 中应落入至少一个 $b'_i$,所以由两个生成元系的元素个数相等,可以认为 $b'_i \in \{a_i\}$.现在容易看到 $b'_i = a_i^{\pm 1}$,即 $b'_1, b'_2, \cdots, b'_n$ 是群 $S$ 的自由生成元系.因而生成系 $b'_1, b'_2, \cdots, b'_n$ 是群 $S$ 的自由生成元系.因而生成系 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 也是自由的.

换言之,这个结果断定,有限秩自由群的任何到自身上的同态都是同构,即有限秩自由群不能同自己的真商群同构,这个定理是 Magnus[6] 用另一种方法证明的.其实它可以由较早的 Nielsen [3]的结果得出.

现在着手证明 Грушко 定理.设

$$g_1, g_2, \cdots, g_n \tag{4}$$

是具有自由分解(2)的(关于生成系(1)的)极小容许生成系.这个系的长为 $l(l>1)$ 的元素 $g_i$ 叫作独特的,如果在(4)中可以找到这样的元素 $g_j$ 和 $g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_s}$ 以及都等于 $\pm 1$ 的它们的指数 $\varepsilon$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 使得以下的条件成立(在这里和下面 $l(g)$ 是元素 $g$ 关于自由分解(2)的长):

1) $j \neq i$.

2) $l(g_j) = l$.

3) $l(g_{i_1}) < l, \cdots, l(g_{i_s}) < l$.

4) $l(g_i \cdot \prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon}) \leqslant l$.

5) $l\left(\prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon}\right) = l$.

6) $l\left(\prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}\right)<l$.

今设 $g$ 是 $G$ 中长为 $l$ 的元素，它的左半，中心元，右半(关于分解(2))简记作 $P, Q$ 和 $R, g=PQR$; 在 $l$ 是偶数时，$Q=1$[1]. 元素 $g$ 叫做可约的(关于生成系(4))，如果在(4)中可以找到这样的元素 $g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_s}$, 以及它们的指数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 使得 $l(g_{i_\nu})<l$, $\nu=1, 2, \cdots, s$, 并且

$$g\cdot\prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}=PQP^{-1},$$

即当 $l$ 是偶数时，$g\cdot\prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}=1$. 反之，称 $g$ 为不可约的.

暂先假设以下论断已经证明:

*(B) 如果(4)是群 $G$ 的极小容许生成元系，而这个系中有长度大于 1 的元，那么在(4)中有不可约的独特元.*

设 $g_i$ 是极小容许系(4)中不可约独特元中长度最小的一个. 并设 $g_i=PQR$. 如果选择元素 $g_j$和 $g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_s}$ 以及它们的指数是独特元素的定义所要求者，那么根据 4)和 5)有:

$$\bar{g}=\prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}\cdot g_j^{\varepsilon}=R^{-1}Q'T.$$

这里 $Q'$ 包含在 $Q$ 所在的那个自由因子中. 如果元素 $\bar{g}$ 不可约，我们就用 $g'_j$ 代替 $g_j$ 来改变(4). 其中 $g'_j$ 用下面式子确定:

$$g'_j=g_i\bar{g}=P(QQ')T; \tag{5}$$

如果 $\bar{g}$ 可约，并且和可约元定义相对应的若有

$$\bar{g}\cdot\prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\beta_\mu}=R^{-1}Q'R,\ l(g_{i_\mu})<l \qquad \mu=1, 2, \cdots, t.$$

那么就取

---

1) 我们在今后使用这种简写法时，将不特别声明.

$$g_j' = g_i\bar{g}\cdot\prod_\mu g_{j_\mu}^{\beta_\mu} g_i^{-1} = P(QQ'Q^{-1})P^{-1}. \tag{6}$$

在两种情况下，$g_j$ 都可由 $g_j'$ 和(4)中其余的元素表出．即我们得到群 $G$ 的一个新的生成元系．易见，它依然是极小的和容许的．

我们要证明，如果用这种方法换掉(4)中所有元素，这些元素按照独特元的定义对于我们考察的元素 $g_i$ 起元素 $g_j$ 的作用，那么元素 $g_i$ 将不再是独特的了．事实上，如果带有指数 $\delta$ 的新元素 $g_j'$ 和乘积 $\prod\limits_\mu g_{i_\mu}^{\nu_\mu}$ 满足独特元定义的要求，那么有：

$$\prod_\mu g_{i_\mu}^{\nu_\mu}\cdot g_j'^{\delta} = R^{-1}Q''U, \tag{7}$$

这里 $Q''$ 和 $Q$ 在一个自由因子中．但是因为元素 $g_j'^{\delta}$ 的左半等于 $P$，如果元素 $\bar{g}$ 不可约，且 $\delta=+1$，或者若 $g$ 可约和 $\delta=\pm1$，在这种情况下，由已得的式子：

$$\prod_\mu g_{\nu_\mu}^{\varepsilon_\mu}\cdot P = R^{-1}\text{ [1]}$$

就将会得到 $R\cdot\prod\limits_\mu g_{\nu_\mu}^{\varepsilon_\mu} = P^{-1}$，而这同元素 $g_i$ 的不可约性相矛盾，因此，余下的可能情况就只是 $\bar{g}$ 不可约和 $\delta=-1$，但是在这种情况下，由(5)和(7)将有等式 $\prod\limits_\mu g_{\nu_\mu}^{\varepsilon_\mu}\cdot T^{-1} = R^{-1}$，即：

$$R = T\Big(\prod_\mu g_{\nu_\mu}^{\varepsilon_\mu}\Big)^{-1}.$$

这表明元素 $\bar{g}$ 是可约的，与假设矛盾．

当我们这样变换生成元系(4)时，在此系中不可能出现新的长度为 $l$ 的不可约独特元．事实上，在系(4)中长度为 $l$ 的可约元素，在用 $g_j'$ 代替 $g_j$ 后仍是可约的．因为出现在可约元定义中的

---

1）考虑独特元定义中的条件 6)！

元素 $g_{i_\nu}$ 其长度都小于 $l$。其次，设在用 $g'_j$ 代替 $g_j$ 后，把某个元素 $g_m$ 弄成是独特的，其中 $m\neq i, m\neq j$，$l(g_m)=l$. 这意味着，可以选择 $g'_j$ 的指数 $\varepsilon'$ 和积 $\prod_\sigma g_{k_\sigma}^{\gamma_\sigma}$，使得对于元素 $g_m$ 和这些元素，所有包含在独特元素定义中的要求都被满足. 但容易看出，在这种情况下，元素 $g_m$ 在变化系(4)以前就已是独特的了. 这是因为，如果 $\varepsilon'=+1$ 而 $\bar{g}$ 不可约或者 $\varepsilon'=\pm1$ 及 $\bar{g}$ 可约(在这些情况下元素 $g_j'^{\varepsilon'}$ 的左半与元素 $g_i$ 的左半重合)，元素 $g_i$ 对于 $g_m$ 起着元素 $g_j$ 的作用，而当 $\varepsilon'=-1$ 而 $\bar{g}$ 不可约时，原来的 $g_j$ 便起着它原有的这个作用.

最后设元素 $g'_j$ 本身是独特的. 如果元素 $\bar{g}=\prod_\nu g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}\cdot g'_j$ 是不可约的，即元素 $g'_j$ 由等式(5)来确定，那么当 $\varepsilon=-1$ 时，从:

$$l(g_j'^{-1})=l[g_j(\prod_\nu g_{i_\nu}^{\alpha_\nu})^{-1}g^{-1}]=l$$

得出，元素 $g_j$ 本身是独特的；只是独特元定义中条件 5)需要一些验证. 但是它非常简单，故留给读者. 如果 $\varepsilon=+1$，那么根据 $g'_j$ 是独特的. 元素 $g_i$ 也是独特的. 因为在这种情况下这两种元素有相同的右半. 而它们的中心元是包含在同一个自由因子当中. 在 $\bar{g}$ 可约的情况下，即 $g'_j$ 按公式(6)确定的情况下，我们有等式:

$$l(g'_j)=l(g_i\cdot\prod_\nu g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}\cdot g_j^\varepsilon\cdot\prod_\mu g_{j_\mu}^{\beta_\mu}\cdot g_i^{-1})=l.$$

从它不难得出不等式:

$$l(g_i\cdot\prod_\nu g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}\cdot g_j^\varepsilon)\leqslant l$$

$$l(g_j^\varepsilon\prod_\mu g_{j_\mu}^{\beta_\mu}\cdot g_i^{-1})\leqslant l$$

这两个不等式表明，元素 $g_j$ 本身是独特的，因为当 $\varepsilon=-1$ 时，第一个不等式说明了这一点，当 $\varepsilon=+1$ 时，第二个不等式说明了这一点. 在这两种情况下，独特元素的定义中的条件 5)，6)显然都被满足.

这样，上面研究的这种对系(4)的改造减少了长度为 $l$ 的不可约独特元素在这个系中的个数. 因此经过有限步以后，我们就得到了一个系，其中完全不含有长度为 $l$ 的不可约的独特元. 数 $l$ 是在系 (4) 中不可约的独特元素的极小长度. 因此我们提高了这个极小长度[1]. 而因为我们在改造时没有改变给定生成元素的长度，也没有增加这些元素的个数，那么经过有限步提高后，我们便得到生成群 $G$ 的新的极小生成容许系，它的某些元素仍然有大于 1 的长度，但是，在这个系中已经没有不可约独特元素了，而这是同结论(B)相矛盾的. 如果我们能肯定结论(B)是正确的，则 Грушко 定理便由此得证. 在下一节中我们将给出命题(B)的证明.

## § 40. Грушко定理(续)

现在我们着手证明命题(B).

据假定上节元素系(4)是 $G$ 的极小容许生成元系，并且(4)中某些元素长度大于 1. 因为(4)极小，则其中任一异于 1 的元素都不可能由这一系中其他元素表出. 因为若 $l(g_i)\geqslant 1$，且 $g_i=\prod\limits_{\nu} g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$, $j_\nu\neq i$，则将 $g_i$ 代以 $g_i'=g_i^{-1}\prod\limits_{\nu} g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$，这便导出一个新的容许生成元系，且其长度小于(4)的长度，因为 $g_i'=1$.

自由因子 $A_1, A_2, \cdots, A_R$ 中的任意一个，它的每个元素可以由(4)中的生成元表出，且在某一子群 $A_m$ 中可求得一个元素 $a$，使得

1) 在长度小于 $l$ 的元素中，根据独特元的定义，很明显，新的不可约的独特元素不能出现.

$a$ 的任意一个用这些生成元表达的式子中都包含一些长度大于 1 的元素. 否则(4)中长度为 1 的元素足以表出 $G$ 中的一切元素，当然也包括(4)中长度大于 1 的元素，在上面我们已经证明这是不可能的. 在 $a$ 的以(4)的生成元表出的各种表达式中，我们选择这样一些表达式，使得在其中所出现的(4)中元素的极大长度是最小的，在这样选出的表达式中我们再选出那些使得具此极大长度的那些元素出现次数最少的表达式，然后再由这些中选择那些长度较最大长度少 1 的元素出现次数最少的表达式等等，直到长度为 1 的元素.

令

$$a=g_{j_1}^{\varepsilon_1}\cdot g_{j_2}^{\varepsilon_2}\cdots g_{j_\omega}^{\varepsilon_\omega}\qquad \varepsilon_i=\pm 1,\ i=1,2,\cdots,\omega \tag{8}$$

为一个这样的表达式，我们有 $\omega\geqslant 2$，因为式中应包含长度大于 1 的元素. 我们用以下符号表示(8)的右端乘积中的一部分

$$[\mu,\nu]=g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}\cdot g_{j_{\mu+1}}^{\varepsilon_{\mu+1}}\cdots g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}\qquad 1\leqslant\mu<\nu\leqslant\omega$$

$l[\mu,\nu]$ 是 $[\mu,\nu]$ 关于自由分解(2)的长度.

以下证明几个关于(8)式右端的引理.

I. 存在这样的 $\mu$ 和 $\nu$，$1\leqslant\mu<\nu\leqslant\omega$，使得

1) $l(g_{j_\mu})=l[\mu,\mu+1]=\cdots=l[\mu,\nu-1]>l[\mu,\nu]$,

2) $l(g_{j_\mu})\geqslant l(g_{j_\lambda})\qquad \mu<\lambda\leqslant\nu$,

3) $l(g_{j_\mu})\geqslant 2$.

事实上，存在一 $\mu$，能使 $l[1,\mu-1]<l[1,\mu]$，但对所有 $\lambda\geqslant\mu$，$l[1,\lambda]\geqslant l[1,\lambda+1]$[1]. 今证 $\mu<\omega$. 因为 $l[1,\omega]=l(a)=1$，故当 $\mu=\omega$ 便将有 $l[1,\omega-1]=0$，即 $[1,\omega-1]=1$. 然而，由此将得 $a=g_{j_\omega}^{\varepsilon_\omega}$，但根据 $l(a)=1$ 及关于 $a$ 所做的假设，这是不可能的.

下面来找这样的 $\nu$，$\mu<\nu\leqslant\omega$，使得：

1) 换言之，$\mu$ 是(8)中具有下面性质的最后一个因子的足码：其前面因子的乘积乘上这一个因子导致增加长度.

$$l[1, \mu] = l[1, \mu+1] = \cdots = l[1, \nu-1] > l[1, \nu].$$

若 $l[1, \mu] \geqslant 2$，这样的下标 $\nu$ 便存在，因 $l[1, \omega] = l(a) = 1$．但若 $l[1, \mu] = 1$，则 $l[1, \mu-1] = 0$，即$[1, \mu-1] = 1$，而因此利用关于(8)式右端所作的假设便将有 $\mu = 1$．换言之，对所有 $\lambda, 1 \leqslant \lambda \leqslant \omega$，将有 $l[1, \lambda] = 1$．令 $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$ 为(8)中长度超过 1 的第一个因子．则由 $l[1, \sigma] = 1$，可知若把(4)中元素 $g_{j_\sigma}$代以

$$g'_{j_\sigma} = [1, \sigma] = [1, \sigma-1] \cdot g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$$

便可得到一个长度小于(4)之长度的新的容许生成元系．这与(4)的极小性矛盾，从而证明了 $\nu$ 的存在．

以下我们将使用记号 $l(g_{j_\mu}) = l$，我们证明引理 1 中的命题1)和命题 2)．由 $l[1, \mu-1] < l[1, \mu]$可知，在乘积 $[1, \mu-1] \cdot g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu} = [1, \mu]$中 $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}$ 的中心元保持不变，或者，对于偶数 $l$，其左半没有完全被抵消．假定对于某个 $\lambda$，$\mu < \lambda < \nu$，我们已证明：对于 $\mu < \sigma \leqslant \lambda$，有 $l(g_{j_\sigma}) \leqslant l$，$l[\mu, \lambda] = l$ 且在积$[1, \mu-1][\mu, \lambda]$中$[\mu, \lambda]$的中心元保持不变，或者，对于偶数 $l$，其左半不完全被抵消．若这时有 $l(g_{j_{\lambda+1}}) > l$，则由 $l[1, \lambda] \geqslant l[1, \lambda+1]$可推知在乘积

$$[1, \lambda+1] = [1, \mu-1][\mu, \lambda] \cdot g_{j_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$$

中，在$[\mu, \lambda]$和 $g_{j_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$间进行消去时，则整个右半及元素$[\mu, \lambda]$的中心元将被消掉，而对于偶数 $l$，其左半也将会受到抵消的作用．由此将有 $l[\mu, \lambda+1] < l(g_{j_{\lambda+1}})$；但此时因为在乘积$[\mu, \lambda+1]$中元素 $g_{j_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$ 是唯一长度大于 $l$ 的因子，我们可以在(4)中以元素 $g'_{j_{\lambda+1}} = [\mu, \lambda+1]$代替元素 $g_{j_{\lambda+1}}$而减少系(4)的长度；明显地，这同样给出了一个容许生成元系．因此，$l(g_{j_{\lambda+1}}) \leqslant l$．若这时有 $\lambda+1 < \nu$，则 $l[1, \lambda] = l[1, \lambda+1]$，从而 $l[\mu, \lambda+1] = l[\mu, \lambda] = l$，$[\mu, \lambda+1]$与$[\mu, \lambda]$之左半相重合．这样对于 $\lambda+1 < \nu$，所有的归纳假定都被证明．若是 $\lambda+1 = \nu$，则由 $l[1, \lambda] > l[1, \nu]$可得在乘积$[\mu, \lambda] g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ 中必消去 $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$的整个左半和中心元，从而 $l[\mu, \nu] < l$．

最后，由 $l=1$ 将会得 $l[\mu,\nu]=0$，即$[\mu,\nu]=1$. 但这就使我们能够以一个较短的乘积代替(8)，而这和关于(8)的假定是矛盾的. 故 $l\geqslant 2$，引理 I 被证完.

以下我们假定乘积$[\mu,\ \nu]$的选择与引理 I 相一致. 还假定在所有满足引理 I 要求的形如$[\sigma,\tau]$和$[\sigma,\tau]^{-1}$，$1\leqslant\sigma<\tau\leqslant\omega$，的乘积中，所选出的乘积含有的因子个数最少. 此外，我们还可以认定这一乘积$[\mu,\nu]=g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}\cdot g_{j_{\mu+1}}^{\varepsilon_{\mu+1}}\cdots g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$是这样一个乘积，它可由系(4)的元素组成并符合引理 I 的所有要求，且所含因子总数最少. $g_{j_\mu}$ 的长度同以上一样记作 $l$.

II. *任一在乘积$[\mu,\nu]$中出现的长度为 $l$ 的元素 $g_i$，至少在其中出现两次.*

实际上，如果某一元素 $g_i$，$l(g_i)=l$，在$[\mu,\nu]$中仅出现一次，那么由于 $l[\mu,\nu]<l$，以 $g_i'=[\mu,\nu]$代替(4)中 $g_i$ 便得到一个其长度短于(4)的新容许生成元系.

III. *如果 $\mu\leqslant\sigma\leqslant\tau\leqslant\nu$，又如果乘积$[\sigma,\tau]$不含有长为 $l$ 的因子，那么 $l[\sigma,\ \tau]<l$. 如果长为 $l$ 的因子出现在这一乘积中且若 $\tau<\nu$，那么 $l[\sigma,\tau]=l$.*

当 $\sigma=\tau$ 时这些是显然成立的. 今假定引理的论断对于乘积$[\mu,\nu]$的含因子个数较$[\sigma,\tau]$为少的所有的部分乘积已经证明. 现在我们需要研究如下情况.

1) $l[\sigma,\tau-1]<l$, $l(g_{j_\tau})<l$, $\tau\leqslant\nu$. 在这种情况下，由$l[\mu,\sigma-1]=l[\mu,\tau-1]=l$，得出在乘积

$$[\mu,\tau-1]=[\mu,\sigma-1][\sigma,\tau-1]\tag{9}$$

中第二个因子的右半保持不被触及，现在由

$$[\mu,\tau]=[\mu,\sigma-1][\sigma,\tau-1]g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}\tag{10}$$

和 $l[\mu,\tau)\leqslant l$，$l(g_{j_\tau})<l$ 得出在乘积$[\sigma,\tau-1]g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}$中化简一定能进行到这样地步，或者消去第一个因子的右半，或者消去第二个因

子的左半，而相应的因子的中心元至少要被合并一次．所以

$$l[\sigma,\tau]\leqslant\max[l[\sigma,\tau-1],l(g_{j_\tau})]<l.$$

2) $l[\sigma,\tau-1]=l$, $l(g_{j_\tau})<l$, $\tau<\nu$．在这种情况下，在乘积(9)中第二个因子的右半仍不被涉及，因而由 $l[\mu,\tau]=l$, $l(g_{j_\tau})<l$ 和(10)得出在乘积$[\sigma,\ \tau-1]\cdot g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}$ 中化简必将去掉元素 $g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}$ 的左半，而它的中心元被合并．所以，$l[\sigma,\tau]=l$.

3) $l[\sigma,\tau-1]<l$, $l(g_{j_\tau})=l$, $\tau<\nu$．由(10)和

$$l[\mu,\sigma-1]=l[\mu,\tau-1]=l[\mu,\tau]=l, \tag{11}$$

和上面一样，得出 $l[\sigma,\tau]\leqslant l$．如果小于号出现，那末将能够减少系(4)的长度，因为元素 $g_{j_\tau}$ 是目前在乘积$[\sigma,\tau]$中长为 $l$ 的唯一元素．所以 $l[\sigma,\tau]=l$.

4) $l[\sigma,\ \tau-1]=l$, $l(g_{j_\tau})=l$, $\tau<\nu$．还是由于(11)将有 $l[\sigma,\tau]\leqslant l$. 假定 $l[\sigma,\tau]<l$，因为按照归纳假定$l[\lambda,\tau]=l$, $\sigma<\lambda<\tau$，则在这种情况下，我们将得出乘积$[\sigma,\tau]$满足引理 I 的所有要求，然而它却是由比乘积$[\mu,\ \nu]$更少的因子组成，而这和$[\mu,\ \nu]$的选择矛盾，所以 $l[\sigma,\tau]=l$.

引理 III 得证.

IV. $l[g_{j_\nu}]=l$.

事实上，如果 $l(g_{j_\nu})<l$，那末假定 $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$ 是在$[\mu,\nu]$中长度为 $l$ 的最后一个因子．由于 $l[\mu,\lambda]=l[\mu,\lambda-1]=l(g_{j\lambda})=l$，这时我们可得元素$[\mu,\lambda]$和 $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$ 有相同的右半．其次，由引理 III 在我们假定的情况下可得出，当 $\lambda<\sigma\leqslant\nu$ 时，将有 $l[\lambda+1,\sigma]<l$. 所以当$\sigma<\nu$ 时，由 $l[\mu,\sigma]=l$，容易看到$l[\lambda,\sigma]=l$，而由$l[\mu,\nu]<l$，可推出 $l[\lambda,\nu]<l$．换言之，乘积$[\lambda,\nu]$满足所有引理 I 要求，然而乘积$[\lambda,\nu]$却仅含有一个长为 $l$ 的元素，这和引理 II 矛盾.

V. 乘积$[\mu,\nu]$至少含有一个长为 $l$ 的因子 $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$, $\mu<\lambda<\nu$.

事实上，如果对于所有 $\lambda$, $\mu<\lambda<\nu$, 有 $l(g_{j\lambda})<l$．那末按 II,

$g_{j_\mu}=g_{j_\nu}$ 和按 III, $l[\mu+1,\nu-1]<l$. 因此, 如果 $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}=PQR$, 其中 $P$ 是元素 $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$的左半, $Q$ 是它中心元, $R$ 是它右半, 则 $[\mu,\nu-1]=PQR'$. 如果现在 $\varepsilon_\nu=-\varepsilon_\mu$, 即 $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}=R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$, 那末由

$$l[\mu,\nu]=l([\mu,\nu-1]\cdot g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu})<l$$

得出 $R'R^{-1}=1$, 从而$[\mu,\nu]=1$, 由于加在乘积(8)上的条件, 这是不可能的. 如果 $\varepsilon_\nu=\varepsilon_\mu$, 即 $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}=PQR$, 就有 $R'P=1$, $Q^2=1$ 和 $[\mu,\nu]=PR$. 由于

$$R'=R\cdot[\mu+1,\nu-1],$$

那末由 $P=R'^{-1}$ 得出

$$[\mu,\nu]=[\mu+1,\nu-1]^{-1}R^{-1}\cdot R=[\mu+1,\nu-1]^{-1},$$

这就使得又可以更短的乘积代替这个乘积, 这同加在乘积(8)上的条件相矛盾. 引理 V 得证.

VI. *在乘积$[\mu,\nu]$中, 在满足条件: $\mu<\lambda<\nu$ 以及长度为 $l$ 的元素 $g_{j_\lambda}$中间至少可找出一个不可约元素.*

首先, 让我们作如下说明. 由可约元素的定义可直接得出, 如果元素 $g$ 可约且如果元素 $g_i^{\varepsilon_i}$ 满足如下条件: $l(g_i^{\varepsilon_i})<l(g)$和 $l(gg_i^{\varepsilon_i})=l(g)$, 那末乘积 $gg_i^{\varepsilon_i}$ 也可约. 乘积 $g_i^{\varepsilon_i}g$ 在条件 $l(g_i^{\varepsilon_i}g)=l(g)$下也是可约的. 其次, 如果元素 $g_1$ 和 $g_2$ 可约和 $l(g_1)=l(g_2)=l(g_1g_2)$, 那末乘积 $g_1g_2$ 也可约. 事实上设 $g_1=PQR$, 此时 $g_2=R^{-1}Q'S$ 和 $g_1g_2=P(QQ')S$,其中 $Q$ 和$Q'$ 处在一个自由因子里且在奇数长度的情况下 $QQ'\neq 1$. 按可约元素的定义, 如果现在

$$g_1\cdot\prod_k g_{i_k}^{\varepsilon_k}=PQP^{-1},\quad g_2\cdot\prod_l g_{j_l}^{\delta_l}=R^{-1}Q'R,$$

那末

$$g_1g_2\cdot\prod_l g_{j_l}^{\delta_l}\cdot\prod_k g_{i_k}^{\varepsilon_k}=P(QQ')P^{-1},$$

即元素 $g_1g_2$ 也可约. 最后, 容易看到, 元素 $g$ 的可约性, 等价于元

素 $g^{-1}$ 的可约性.

转来证明引理. 它显然在长度 $l$ 是偶数时是正确的, 这是因为如果系(4)中偶数长度的元素是可约的, 那末, 这个系不是极小的. 假定 $l$ 为奇数, 由引理 V 得出在乘积$[\mu, \nu]$中存在长度为 $l$ 的因子 $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$, $\mu<\lambda<\nu$. 如果所有这些元素是可约的, 那末由上面所作的说明以及引理 III 知, 乘积$[\mu+1, \nu-1]$也是可约的. 除此之外, 也是依引理 III, $l[\mu+1, \nu-1]=l$. 设$[\mu+1, \nu-1]=PQR$ 和

$$[\mu+1,\nu-1]\cdot\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}=PQP^{-1}.$$

此时 $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}=SQ_1P^{-1}$, $g_{i_\nu}^{\varepsilon_\nu}=R^{-1}Q_2T$, 并且由于 $l[\mu, \nu]<l$ 应该有 $Q_1QQ_2=1$ 和$[\mu, \nu]=ST$. 如果元素 $g_{i_\mu}^{\varepsilon_\mu}$ 和 $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ 也可约, 则命

$$g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}=SQ_1S^{-1}, \quad g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}\prod_n g_{y_n}^{\nu_n}=R^{-1}Q_2R.$$

这时

$$R\cdot\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}=P^{-1}, \quad P^{-1}\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}=S^{-1}, \quad T\cdot\prod_n g_{y_n}^{\nu_n}=R.$$

由之

$$[\mu, \nu]=S\cdot T=\Big(\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}\Big)^{-1} PR\Big(\prod_n g_{y_n}^{\nu_n}\Big)^{-1}$$

$$=\Big(\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}\Big)^{-1}\Big(\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}\Big)^{-1}\Big(\prod_n g_{y_n}^{\nu_n}\Big)^{-1},$$

即乘积$[\mu, \nu]$能够由系(4)中长度小于 $l$ 的元素表示出来, 但是这和加在乘积(8)上的条件相矛盾.

如果元素 $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}$ 和 $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ 至少有一个是不可约的, 那末由于引理II, $g_{j_\mu}=g_{j_\nu}$. 如果 $\varepsilon_\mu=\varepsilon_\nu$, 那末 $S=R^{-1}$, $P^{-1}=T$, 由之有

$$[\mu, \nu]=ST=R^{-1}P^{-1}=\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}.$$

如果 $\varepsilon_\mu=-\varepsilon_\nu$, 那末 $S=T^{-1}$, 从而$[\mu,\nu]=S\cdot T=1$, 在这二种情况下我们都导至同乘积(8)的选择相矛盾. 引理 VI 得证.

VII. *所有长为 $l$ 的不可约元素 $g_{j_\lambda}$, $\mu<\lambda<\nu$, 是独特的.*

如果 $\varepsilon_\lambda=+1$, 那末在乘积$[\mu,\nu]$中取长为 $l$ 的从右面离 $g_{j_\lambda}$ 最近的元素 $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$; 我们有 $\sigma\leqslant\nu$. 此时考察乘积$[\lambda,\sigma]$, 我们可断言, 元素 $g_{j_\lambda}$ 满足独特元的定义中所有要求. 事实上, 条件 2)和条件 3)可由元素 $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$ 的选择得出, 条件 4), 5), 6)由引理 III 在 $\sigma<\nu$ 的情况下得出. 容易看到, 在 $\sigma=\lambda$ 的情况下, 这些条件也成立.

剩下来要证的是条件 1) 的正确性. 设 $j_\sigma=j_\lambda$. 如果 $\varepsilon_\sigma=+1$ 且如果 $g_{j_\lambda}=PQR$, 那么同样有 $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}=PQR$, 由之有

$$g_{j_\lambda}\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1}g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha}\cdot g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}=PQR\cdot\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1}g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha}\cdot PQR.$$

由于 $l[\lambda,\sigma]\leqslant l$ 和 $l[\lambda,\sigma-1]=l$, 那末由此得出

$$R\cdot\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1}\cdot g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha}=P^{-1}.$$

这与元素 $g_{j_\lambda}$的不可约性相矛盾. 如果是 $\varepsilon_\sigma=-1$, 即 $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}=R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$, 那末

$$g_{j_\lambda}\cdot\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1}g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha}\cdot g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}=PQR\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1}g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha}R^{-1}Q^{-1}P^{-1}.$$

由 $l[\lambda,\sigma]\leqslant l$ 和 $l[\lambda,\sigma-1]=l$, 得出等式 $\prod\limits_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1}g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha}=1$, 从而 $[\lambda,\sigma]=1$, 而这和加在乘积(8) 上的条件矛盾. 元素 $g_{j_\lambda}$ 是独特的就被证明了.

如果有 $\varepsilon_\lambda=-1$, 那末我们可在乘积$[\mu,\nu]$中取一个从左面离 $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$ 最近的长度为 $l$ 的元素, 而进行类似的论证. 引理 VII 得证.

论断($B$)的证明到此结束, Грушко 定理随之得证.

## §41. 具有限个定义关系式的群

若群$G$由在某个生成元系中的一组有限个定义关系式给出，则在这些关系中只出现有限个生成元，从而群$G$是一个由有限个生成元和有限个定义关系所确定的群和某个自由群的自由积．因此，我们可以只限于研究具有限个生成元的群．

具有限个生成元和定义关系式的群构成了比全体具有限个生成元的群窄得多的群类．我们由§38可知具有限个生成元的群的集合有连续统势，而具有限个生成元及关系式的群的集合，由简单的集合论知识可知，只是可数的．

所有有限群都是具有限个生成元和有限个定义关系式的群，这是由有限群均可由 Cayley 表给出而推导出的．

我们想证明几个定理，这些定理紧接着具有限生成元和定义关系式的群的定义，并表明这一群类的确定义得很好．我们暂不要求生成元和关系式的有限性，先指出关于生成元系和一组定义关系的某些类型的变换，即一些由给定的生成元系和一组定义关系式到同一个群的另一个生成元系和另一组定义关系的变换方法．

设群$G$由符号$a_\alpha, a_\beta, \cdots$构成的生成元系$\mathfrak{M}$和某个联系这些生成元的一组定义关系式给出．那末这个群也可以由集合$\mathfrak{M}$及新符号$b$构成的生成元系$\overline{\mathfrak{M}}$给出．如果在定义关系中添上某个形如

$$bw(a)=1$$

的关系，这里$w(a)$是关于符号$a_\alpha, a_\beta, \cdots$的任意字．

首先证明如下引理

设给出具自由生成元系$\mathfrak{M}$的自由群$W$，若$b$为$\mathfrak{M}$的一个元，$\mathfrak{M}'$为$\mathfrak{M}$中除$b$外所有元的集合，而$B$是群$W$的由元$b$生成的正规子群，则商群$W/B$同构于以$\mathfrak{M}'$为自由生成元系的自由群．

事实上，群$W$中由集合$\mathfrak{M}'$生成的子群$W'$是以$\mathfrak{M}'$为自由生成元系的自由群. 另一方面，在$B$中出现的所有字都具有这样的性质：若在字中去掉$b$的所有幂然后进行一切必要的约简，则得到空字. 这一断言对于与$b$共轭的字是显然的，它对$B$的任何元都成立可由下面的说明得出：如果$W$的字$w_1$和$w_2$都使得在去掉元$b$之幂并接着化简后变为空字，则它们的乘积$w_1w_2$也具有同样的性质. 由此可见$B\cap W'=E$，故由同构定理

$$W/B\simeq W'/E\simeq W'.$$

转入定理的证明. 若$W$是以$\mathfrak{M}$为自由生成元系的自由群，则$G\simeq W/H$，此处正规子群$H$由给定的定义关系式的左边生成. 设$\overline{W}$为具自由生成元系$\overline{\mathfrak{M}}$的自由群，于是$\overline{W}\supset W$，又设$\overline{H}$为$\overline{W}$的正规子群，它由$H$中元素及元素$c=bw(a)$生成. 要证

$$\overline{W}/\overline{H}\simeq W/H.$$

先设$w(a)$是空字，即$c=b$，若$B$为群$\overline{W}$中由元素$b$生成的正规子群，则由引理有

$$\overline{W}/B\simeq W.$$

根据群和商群的子群间相对应定理(§ 10)在$\overline{W}$中有正规子群$\overline{H}'$与正规子群$H$相对应且

$$\overline{W}/\overline{H}'\simeq W/H.$$

但正规子群$\overline{H}'$实际上与$\overline{H}$重合，这是因为$\overline{H}'$既含$H$，又含元$b$，即$\overline{H}'\supseteq\overline{H}$，但另一方面，$\overline{H}'$的所有元是形如$hb'$的，这里$h\in H$，$b'\in B$，即$\overline{H}'\subseteq\overline{H}$.

如果我们能证明，集合$\mathfrak{M}$和元素$c=bw(a)$合在一起组成群$\overline{W}$的新的自由生成元系，那么任意字$w(a)$的情形将可归结为已研究过的情形. 为此只要证明，元素$a_\alpha$, $a_\beta$, …与元素$c$不以任何关系式相联系，因为显然这些元一起生成群$\overline{W}$. 设在群$\overline{W}$中有等式

$$w_1(a)c^{\delta_1}w_2(a)c^{\delta_2}\cdots w_k(a)c^{\delta_k}=1,$$

其中 $w_1(a), \cdots, w_k(a)$ 是关于元 $a_\alpha, a_\beta, \cdots$ 的非空字而 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k$ 是非零整数. 在此等式中以 $bw(a)$ 代替元素 $c$ 并完成一切约简后左边应变为空字，因为否则我们会得到在群 $\overline{W}$ 中联系 $\overline{\mathfrak{M}}$ 中符号的关系式. 但实际上一切因子 $b$ 和 $b^{-1}$ 都是约不掉的，因为当 $i=2, 3, \cdots, k$

$$c^{-1}w_i(a)c=w^{-1}(a)b^{-1}w_i(a)bw(a),$$

$$cw_i(a)c^{-1}=bw(a)w_i(a)w^{-1}(a)b^{-1},$$

即在这两种情况下元素 $b$ 和 $b^{-1}$ 都被非空字所分开. 定理证得.

我们约定用 $A$ 型变换称呼在刚证得的定理中所描述的生成元系和定义关系式组的变换及其一切逆变换，后者指的是在生成元系中去掉一个元素 $b$，如果这个元只在形如 $bw(a)=1$ 的一个定义关系式中出现，这里 $w(a)$ 是关于其余生成元的字，并将这一关系本身也从这一组定义关系中舍去.

另一方面，如果群由某些生成元和某些定义关系式给出，则这些生成元的所有其它的关系式都是已知定义关系式的推论，即其左边含于定义关系式的左边所生成的自由群的正规子群之中，从而这一关系式可添入这一组定义关系式中. 反之，从一组定义关系式中可以去掉所有可由其余定义关系式推出的关系式，我们把这些变换称之为 $B$ 型变换.

对 $B$ 型变换易证如下强化的狄克定理(见 § 18)，若群 $G$ 和 $G'$ 由关于同样生成元的某些定义关系式组给出，同时群 $G$ 的所有定义关系式都是群 $G'$ 的定义关系式的推论，则群 $G'$ 同构于群 $G$ 的商群. 事实上，在这种情况下群 $G'$ 可由群 $G$ 和群 $G'$ 的给定定义关系式的全体给出，于是剩下只是应用一下狄克定理.

最后我们指出 $B'$ 型变换，设群 $G$ 由生成元 $a_\alpha, a_\beta, \cdots$ 及 $b$ 和某一组定义关系式给出，关系之一形如

$$bw(a)=1,$$

并且元素 $b$ 可能在其他定义关系式中出现，取一个这样的关系式

$$\overline{w}(a;b)=1 \tag{1}$$

(其左边是关于 $a_\alpha, a_\beta, \cdots$ 和 $b$ 的字)，以$w^{-1}(a)$替换此式出现的一个因子 $b$(或以 $w(a)$ 替 $b^{-1}$)并进行必要的约简，我们得到新关系式

$$\overline{w}'(a;b)=1, \tag{2}$$

并在定义关系式组中以此代替关系(1).

$B'$ 型变换可以通过单纯应用 $B$ 型变换得到. 事实上，如果，例如

$$\overline{w}(a,b)=\overline{w}_1(a;b)b\overline{w}_2(a,b),$$

并且分出应被替换的一个因子 $b$，则

$$\overline{w}'(a,b)=\overline{w}_1(a;b)(bw(a))^{-1}\overline{w}_1{}^{-1}(a;b)\overline{w}(a,b),$$

即关系(2)是已知定义关系式的推论，因此根据 $B$ 型变换可以将它添入定义关系式组中. 但是这时由最末一个等式解出 $\overline{w}(a,b)$，我们就得到关系式(1)是其余关系式的推论，因此可以舍去.

定义关系式的这些上述类型的变换使我们容易证明关于有有限生成元系和定义关系式组的群的若干重要定理.

*若群 $G$ 由有限个定义关系式组联系的有限生成元系给出，则当取任何其他的有限生成元系时，这个群仍可由某个有限定义关系式组给出.*

设群 $G$ 由生成元 $a_1, \cdots, a_k$ 和定义关系式 $w_1(a)=1, \cdots, w_s(a)=1$ 给出. 设 $b_1, \cdots, b_l$ 是 $G$ 的另一个有限生成元系. 任一 $b_i$ 都可以表成第一系元素之幂的乘积形式. 对每个 $i$ 选定一个可能的表法：

$$b_i=f_i(a), \quad i=1\cdots l.$$

现在群 $G$ 可由生成元 $a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_l$ 和定义关系式

$$\left.\begin{array}{l} w_1(a)=1, \cdots, w_s(a)=1, \\ b_1=f_1(a), \cdots, b_l=f_l(a), \end{array}\right\} \tag{3}$$

给出($A$ 型变换). 又用 $b_1, \cdots, b_l$ 表示每个 $a_j$

$$a_j=\varphi_j(b) \qquad j=1, 2, \cdots, k.$$

并在定义关系式(3)上添入关系式

$$a_1=\varphi_1(b), \cdots, a_k=\varphi_k(b). \tag{4}$$

这些关系式应是关系式(3)的推论($B$ 型变换). 现利用关系式(4)将(3)中元素 $a_1, \cdots, a_k$ 以它们关于 $b_1, \cdots, b_l$ 的表示式代入($B'$ 型变换), 我们得到联系元素 $b_1, \cdots, b_l$ 的 $s+l$ 个关系式, 这些关系式连同(4)给出了群 $G$ 关于生成元 $a_1, \cdots, a_k$ 和 $b_1, \cdots, b_l$ 的定义关系式组. 最后, 施行 $A$ 型变换我们去掉生成元 $a_1, \cdots, a_k$ 及关系式(4).

*若群 $G$ 在某个有限生成元系下由有限个定义关系式给出, 则在这个群的任何其他的有限生成元系下, 从任何联系这些生成元的定义关系式组中总能选出有限子系, 足以给出此群.*

上面已证的定理使我们可以限于下列情形: 群 $G$ 关于生成元 $a_1, \cdots, a_n$ 既可以由有限定义关系式组

$$w_1(a)=1, \cdots, w_s(a)=1$$

给出, 也可由无限定义关系式组

$$\overline{w}_1(a)=1, \ \overline{w}_2(a)=1, \cdots$$

给出, 在相应的自由群中字 $w_1(a), \cdots, w_s(a)$ 与字

$$\overline{w}_1(a), \ \overline{w}_2(a), \cdots \tag{5}$$

生成同一个正规子群 $H$. 但是每个元 $w_i(a)$, $i=1, 2, \cdots, k$, 可以表成有限个与序列(5)的某些元共轭的元素的乘积. 这样(5)中的有限个元素已可生成整个正规子群 $H$. 最后有这样的定理(Tietze [1])成立.

*若群 $G$ 可用两种方法由有限生成元系和有限定义关系式组给出, 则可以通过有限次 $A$ 型及 $B$ 型变换由一种给出方法变为另一种给出方法.*

事实上，设群 $G$ 由生成元系 $a_1, \cdots, a_k$ 和定义关系式

$$w_1(a)=1, \cdots, w_s(a)=1 \tag{6}$$

给出，又可由生成元系 $b_1, \cdots, b_l$ 及关系式

$$w'_1(b)=1, \cdots, w'_t(b)=1 \tag{7}$$

给出. 因每个 $b_i$ 应可用第一组生成元表示，故可设 $b_i=f_i(a)$, $i=1, 2, \cdots, l$, 类似地 $a_j=\varphi_j(b)$, $j=1, \cdots, k$. 现在在施行 $A$ 型变换后，我们可用生成元 $a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_l$ 和定义关系式(6)及

$$b_1=f_1(a), \cdots, b_l=f_l(a)$$

给出群 $G$, 然后再进行 $B$ 型变换，添上关系式(7)和关系式

$$a_1=\varphi_1(b), \cdots, a_k=\varphi_k(b).$$

完全对称地，这一个生成元系和定义关系式组也可由群 $G$ 的第二种给出方法导出. 现在只要注意到 $A$ 型变换和 $B$ 型变换的逆变换本身也是同一类型的变换，则定理的证明就完成了.

对具有有限生成元和有限定义关系式的群，很自然地产生若干具有算法特性的问题(见Dehn[1]), 其中最重要的是*恒等问题*: *求出一个算法，使得对任何由有限个生成元和关系式给出的群，可以经过有限步而能回答下面的问题：这些生成元的某个已知字是否等于单位元；或者证明这样的算法不可能存在.* 易见，这个问题可以叙述成：寻求算法回答问题：两个已知字是否彼此相等，也可改述成：寻求算法回答问题：自由群 $w$ 的一个已知元是否含于 $W$ 的某些其他的已知元生成的正规子群之中.

目前对于比所有具有限生成元和关系式的群较为特殊的群类，恒等问题已正面解决. 例如，对自由群(甚至不要生成元有限的假定)恒等问题的解可像下面那样得出，即任一个元都具有唯一的最简表示式. 还易见，如果对自由积的每个因子恒等问题已解决，那末对自由积的恒等问题也就解决了，对于具一个定义关系的群，恒等问题由 Magnus W. [3] 解决，处理恒等问题的新的更一

般方法在 Тартаковский[1—6]的工作中可见到[1]．

更为困难的是共轭问题，即寻求算法以回答：在具有限生成元和关系式的群中这些生成元的两个已知字是否共轭．对自由群这个问题已正面解决：若在自由群$W$中给定一个用自由生成元组成的字$w$，则"将此字转成循环"，即把它的末尾写到头上去并进行约简，我们便得到一个与字$w$对应的循环字，在循环字中所有元都平等，无第一与最末之分．显然在自由群$W$中两字共轭当且仅当它们对应同一个循环字．

最后有同构问题，即寻求算法，以回答问题：两个由有限生成元和关系式给出的群是否彼此同构．这个问题至今尚未解决，甚至对已知群之一是单位群的情形，还有两个群的每一个都由一个定义关系式给出的情况也没有解决．这里要指出，用 Cayley 表给出有限群导致类似的同构问题．（参看补充 15.4）

具一个定义关系式的群构成了在某种意义下最接近于自由群的群类．这类群的研究比起任何有限个关系式的情形来较为深入一些．但是例如一个关系式群的子群问题至今还远未彻底解决．作为基本结果的有如下的**自由性定理**：（Magnus[1]）

如果群$G$由生成元$a_1, a_2, \cdots, a_n$和一个定义关系式$f(a_1, \cdots, a_n)=1$给出，又若元$a_n$含于这个关系式中且不能通过变形把它从此关系式中去掉，则子群$\{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$是自由群，元素$a_1, \cdots, a_{n-1}$是它的自由生成元．

我们不准备引入这一定理的证明[2]．我们要指出由这一定理可以推出(见 Magnus[1])：自由群$W$的两个元在$W$中生成同一个正规子群，当且仅当这两个元素是共轭的；这再一次表明自由群

1）在第二版校样时曾指出 Новиков[1] 给出恒等问题的否定解决．在准备第三版这段时间下面叙述的问题也得到解决．见补充 15.4．

2）见 Reidemeister[3]．

为正规子群所充满，在 § 36 中我们已从另一角度考察过.

在 Whitehead[2]的工作中指出一个算法能回答如下问题：已知的具一个定义关系式的群是否与某个自由群同构.

# 第十一章　直积．格

## §42．一些准备

群的直积的定义和一些基本性质已经在§17中给出了．本章的目的是叙述直积理论中较深入的一些结果．

从阿贝尔群的理论中我们知道（参看§§25和26），存在这样一些群，它们可分解成直积，但不能分解为不可分解群的直积．这就引出这样的问题：在什么条件下此种分解是可能的？下面定理给出部分的解答．

*如果群 $G$ 的直因子的所有降链都中断，则此群不可能分解成无穷多个子群的直积，而它的任意具有有限多个因子的直分解都可接续成其因子都是不可分解群的一个分解．*

事实上，若群 $G$ 有具无穷多个因子的直分解，则存在其因子集是可数的一个分解，并设

$$G=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\times\cdots$$

是它们中的一个．若令

$$B_k=A_k\times A_{k+1}\times\cdots$$

则

$$G=B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_k\supset\cdots$$

将是群 $G$ 的直因子组成的无穷递降序列．定理的前一半证完．

今设

$$G=H_1\times H_2\times\cdots\times H_k$$

是群 $G$ 的一个直分解，并且它不能接续成具不可分解因子的一个分解．由之得，此分解至少含一个直因子，例如是 $H_1$，它可分解但不能分解成不可分解因子的直积．取群 $H_1$ 的某个直分解 $H_1=$

$H_{11}\times H_{12}$. 显然,这两个也是$G$的直因子$H_{11}$和$H_{12}$,其中至少有一个又是可分解的但没有具不可分解因子的分解. 继续这个过程,我们便得群$G$的一个无限递降直因子链.

在所证明的这个定理的叙述中关于群$G$直因子降链中断的假设可以换成直因子升链中断的条件. 事实上,若给定群$G$的无限递降直因子序列,

$$G\supset H_1\supset H_2\supset\cdots\supset H_n\supset\cdots$$

则由 VII′(§ 17), $H_n=H_{n+1}\times F_n$, $n=1,2,\cdots$,我们便得一个升序列

$$F_1\subset(F_1\times F_2)\subset\cdots\subset(F_1\times F_2\times\cdots\times F_n)\subset\cdots,$$

它也是由群的直因子组成的. 这样, 由直因子升链的中断可引出直因子降链的中断来,随之上面证过的定理也是成立的.

**推论:** 一个群,若它的所有降或升不变链都中断,特别若它具有主列时,则它可分解为有限个不可分解因子的直积.

在§17中曾指出一系列不可分解群的例子. 其次由§35我们知道,任意可分解成自由积的群都不能分解成直积. 这个结果还说明,不存在异于$E$的这样的群,它是以之为子群的任意群之直因子[见补充 5.1]. 因而下面定理就显得有趣了, 因为它使得我们从新的角度看待完全群(参看§13).

任一个完全群,若它是某个群的正规子群,则它也必是此群的直因子.

**证明:** 设群$G$含有一个正规子群$A$, 后者是完全群. 用$B$表示$A$在$G$中的中心化子. 如在§11末证过的,它是$G$的正规子群. 因为$A$没有中心,故正规子群$A$和$B$之交等于$E$,因此$A$和$B$在$G$中形成直积. 此直积和整个群$G$重合,这是因为,若$g$是$G$中任意元素, 则用此元素去变形正规子群$A$就确定完全群$A$的一个自同构,它该是内自同构,即是由$A$的一个元素的变形产生的. 由之得元素$b=ga^{-1}$与$A$中每一元素都可换,随之属于$B$中,因此

$$g=ba\in A\times B$$

即 $G=A\times B$.

可以证明(参看 Baer[33]), 只有完全群具有在此定理中所讨论过的这个性质.

在下面我们讨论群直积理论中两个基本问题. 第一个问题是, 在什么条件下, 一个群的两个任意直分解具有共同的接续; 因而, 这样的群没有多于一个具不可分解因子的直分解. 阿贝尔群, 特别是有限的阿贝尔群, 说明一个群只有唯一具不可分解因子之直分解的情况是很少的. 然而, 在非交换情况这是较常见的; 下面我们将指出, 作为特例, 所有无中心的群, 以及所有与自己的换位子群重合的群都具有上面我们感兴趣的这个性质.

一个更重要的问题是, 在什么条件下一个群的两个任意直分解具有同构的接续, 因而, 一个群的任意两个具不可分解因子的直分解彼此是同构的, 这里当然要假设此群是有这样的分解. 我们知道, 阿贝尔群的许多重要类型都有上面指出的这个性质. 同时在 § 28 中曾指出过, 存在有准素阿贝尔群, 它们具有直分解而这些直分解没有同构的接续. 对于带算子的阿贝尔群且能分解成有限个不可分解群的直积的情形 Krull[3] 给出了相应的例子, 而在 Курош[16] 中构造了不带算子的群, 它有两个不同构的直分解, 其中每一个都由两个不可分解因子组成. 下面就来叙述这个例子.

考察群 $A$, 它具有生成元 $a_1$ 和 $a_2$ 以及一个定义关系式

$$a_1^2=a_2^2.$$

这是 (参看 § 35) 具有相重子群 $\{a\}$ 的两个无限循环群的自由积, 其中

$$a=a_1^2=a_2^2.$$

由 § 35 中结果可得, 群 $A$ 的中心是子群 $\{a\}$ 而 $A$ 不含有异于 1 的

有限阶元素. 随之, 群 $A$ 不可分解成直积, 这是因为, 如果要是有这样的分解, 则中心 $\{a\}$ 必将完全含于其中一个直因子中, 而此时元素 $a_1, a_2$ 的每一个在第二个因子中的分量都有不大于 2 的阶.

另一方面, 我们考察群 $B$, 它具有生成元 $b_1$ 和 $b_2$ 以及一个定义关系式

$$b_1^3 = b_2^3.$$

和上面一样, 群 $B$ 的中心是子群 $\{b\}$, 其中

$$b = b_1^3 = b_2^3,$$

$B$ 不含异于 1 的有限阶元素且不可分解成直积.

要找的群 $G$ 就是群 $A$ 和 $B$ 的直积:

$$G = A \times B. \tag{1}$$

为了构造群 $G$ 的另一个直分解且它不和分解(1)同构, 我们令

$$c = a^3b^{-2}, \quad d = a^{-1}b,$$

$$c_1 = aa_1b^{-1}, c_2 = aa_2b, c_3 = ab^{-1}b_1, c_4 = ab^{-1}b_2. \tag{2}$$

设

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \quad D = \{d\}.$$

因为由(2)可得等式

$$c_1d = a_1, \quad c_2d = a_2, \quad c_3d = b_1, \quad c_4d = b_2,$$

故

$$G = \{C, D\}$$

其次, 子群 $C$ 和 $D$ 元素间是可换的, 这是因为 $D$ 在群 $G$ 的中心里面.

现在来找子群 $C$ 和 $D$ 的交. 由(2)得

$$c_1^2 = c_2^2 = c_3^3 = c_4^3 = c$$

以及 $c_1, c_2$ 两元素中的每一个和 $c_3$, $c_4$ 两元素中的每一个是可换的. 注意到元素 $c$ 属于群的中心, 由之便得, 子群 $C$ 中任意元素 $x$ 可写成下面的乘积形式: 元素 $c$ 的一个幂乘以长为 $l_1, l_1 \geqslant 0$, 的

一个字，其中元素 $c_1$ 和 $c_2$ 的一次幂交替出现，再乘以长为 $l_2$, $l_2\geqslant 0$，的一个字，其中元素 $c_3$ 和 $c_4$ 的一次幂和二次幂交替出现．在此表示法中把元素 $c_1, c_2, c_3, c_4$ 代以它们在(2)中的表达式，就可把元素 $x$ 表成下面的乘积形式：中心的一个元素乘以长为 $l_1$ 的字，其中元素 $a_1$ 和 $a_2$ 的一次幂交替出现，再乘以长为 $l_2$ 的字，其中元素 $b_1$ 和 $b_2$ 的一次幂和二次幂交替出现．随之，元素 $x$ 属于群 $G$ 的中心仅当 $l_1=l_2=0$ 时，亦即若 $x$ 是元素 $c$ 之幂时．由此得

$$C\cap D=\{c\}\cap D=E.$$

这就证明了存在有直分解

$$G=C\times D. \tag{3}$$

它显然是不与分解(1)同构．分解(3)中的两个因子都是不可分解的，这对 $D$ 是显然的而对 $C$ 可象上面对群 $A$ 那样去证，不过此时要注意到群 $C$ 的中心是子群 $\{c\}$，这可由上段中所说过的得到．

与刚才讨论的相似的一些例子的存在使得下面的工作变成很自然的了：去寻找更广的一些群类，对它们可以证明两个任意具不可分解因子的直分解是同构的，或者更一般地，对任意两个直分解都存在有同构的接续．对于任意有限群这在 Remak[1] 中证明了，而在 Шмидт[1, 2] 中又重新证了．晚一些，Шмидт[4] 对具有主列并且允许有任意的算子集的群证明了相应的定理．这个 Шмидт **定理**是一系列研究的出发点．它的不同的推广，以及引向另外一些方向的结果，例如可在 Курош[1, 13, 16]，Fitting[2]，Kořinek[1]，Головин[1]，Лившич[2]，Baer[37, 38] 中找到．

下面我们来叙述 Kořinek 定理：*如果在群 $G$ 的中心，子群的降链中断，则群 $G$ 的两个任意直分解具有中心同构的接续．*

其次，发现了直积的理论最适宜在 Dedekind 格的理论中去研究．Ore[2] 把 Шмидт 定理本身移置到 Dedekind 格上去．延此方向进一步的结果包含在上面提到过的 Курош[13, 16] 中，以

及 Граев[3], Baer[39], Лившиц[3] 中. 在 § 47 中我们将证明 Курош[16]中的一个定理, 由之可得出 Шмидт 定理; 并且为了弄得非常清晰, 我们将使用格论和群论相混合的方法. 把此定理移置到格论中可在 Лившиц[3]中找到.

**中心同构** 群 $G$ 的两个子群 $A$ 和 $B$ 叫作*中心同构的*, 如果它们同构并且在其间存在有一个同构对应 $\varphi$(如果考察的群是带算子的, 则它也是带算子的), 使得对任意 $a\in A$, 元素 $ab^{-1}$ 属于群 $G$ 的中心, 其中 $b=a\varphi$. 注意在此情况有

$$b^{-1}a=b^{-1}(ab^{-1})b=ab^{-1}.$$

群 $G$ 的两个直分解叫作*中心同构的*, 如果在这两个分解的因子之间存在一个一一对应, 使得互相对应着的因子是中心同构的. 通常群的直分解的同构常是中心同构.

在后面将用到下面的引理:

*若 $G=A_1\times B=A_2\times B$, 则子群 $A_1$ 和 $A_2$ 是中心同构的*

事实上, 子群 $A_1$ 和 $A_2$ 是同构的, 因为依 § 17 中的 VIII, 它们都同构于商群 $G/B$. 在此同构对应下 $A_1$ 和 $A_2$ 中相互对应的元素 $a_1$ 和 $a_2$ 属于对 $B$ 的同一陪集中, 即是在 $B$ 中有元素 $b$, 使得 $a_1=a_2b$. 元素 $b$ 和 $A_2$ 中任意元素都可换. 另一方面, $B$ 中任意元素和 $a_1, a_2$ 都可换, 因而和元素 $b$ 也是可换的. 这样, 元素 $b$ 含在群 $G$ 的中心内.

这个引理使得我们在证明直分解的中心同构时可以使用下面的方式. 设给定群 $G$ 的两个直分解:

$$G=\prod_{\alpha} A_{\alpha}=\prod_{\alpha} B_{\alpha}, \tag{4}$$

且在它们的因子间已建立了一个一一对应. 其次, 设第一个分解中的任意因子 $A_\alpha$ 可在第二个分解中代替对应于它的因子 $B_\alpha$, 即对任意 $\alpha$ 有直分解

$$G=A_\alpha\times\prod_{\beta\neq\alpha}B_\beta.$$

在这种情况下，由引理便知直分解(4)是中心同构的．在直积理论中对代替这一概念的各种不同方案的研究可在 Baer[37]中找到．

## §43．格

在群论的所有领域内子群的概念都起着特别重要的作用．在合成列和直积的理论中这个作用就更是巨大；在这些理论中，在基本概念(直积，主列)的定义内，以及在很大程度上在基本定理的叙述中出现的不是群的元素及其乘法，而只是子群(或正规子群)及其集论意义下的包含关系以及交和并的运算．因此把类似于群的所有子群或所有正规子群集的结构，用公理刻划后，作为一个独立研究对象就变成自然而合理的了．这种性质的结构，将称之为格，在数学的非常不同的领域中经常碰到并且关于它们的理论充分广泛的建立起来了(参看书 Birkhoff[5])．在本节和下一节中将只介绍格的一些基本定义和初等性质，它们将在后面直积理论中被用到．

集 $S$ 叫作*偏序集*，如果在其中对某些元素对 $a,b$ 定义了关系 $a\leqslant b$(读作：«$a$ 在 $b$ 中»，«$a$ 在 $b$ 前»，«$a$ 小于或等于 $b$»)且满足以下条件：

1）$a\leqslant a$;

2）由 $a\leqslant b,b\leqslant a$ 有 $a=b$，即元素 $a,b$ 重合；

3）由 $a\leqslant b,b\leqslant c$ 有 $a\leqslant c$(传递性)．

符号 $a<b$ 将表示 $a\leqslant b$ 而 $a\neq b$．符号 $a\geqslant b$(«$a$ 包含 $b$»，«$a$ 在 $b$ 后»，«$a$ 大于或等于 $b$»)和 $a>b$ 相应地等价于 $b\leqslant a$ 和 $b<a$．

偏序集 $S$ 叫作*格*，如果它满足下面两个条件：

I．对 $S$ 中任意元素对 $a,b$ 在 $S$ 中有元素 $c=ab$，$a$ 和 $b$ 之*积*，

使得

$$c \leqslant a \qquad c \leqslant b,$$

并且若某个元素 $c'$ 也有性质 $c' \leqslant a, c' \leqslant b$, 则有 $c' \leqslant c$.

II. 对 $S$ 中任意元素对 $a, b$ 在 $S$ 中有元素 $d = a + b$, $a$ 和 $b$ 之和, 使得

$$d \geqslant a, \qquad d \geqslant b,$$

并且若某个元素 $d'$ 也有性质 $d' \geqslant a, d' \geqslant b$, 则有 $d' \geqslant d$.

这个定义依赖于集论中序的概念. 它可以换成下面的完全代数的定义.

集 $S$ 叫作格, 如果在其中定义了两个代数运算, 乘和加, 把 $S$ 中任意元素对 $a, b$ 对应于它们的积 $ab$ 和它们的和 $a+b$, 且这些运算是交换的和结合的

$$ab = ba, \qquad a + b = b + a \tag{1}$$

$$a(bc) = (ab)c \qquad a + (b + c) = (a + b) + c \tag{2}$$

并对任意 $a \in S$ 满足条件

$$aa = a, \qquad a + a = a \tag{3}$$

而它们之间适合条件:

$$\text{若 } ab = a \text{ 则 } a + b = b, \text{反过来也对} \tag{4}$$

今证这两个定义的等价性. 在第一个定义中引入的两个元素的乘积与和是单值的, 这是因为, 如果例如在公理 I 中元素 $\bar{c}$ 也能起元素 $c$ 的作用, 则有 $c \leqslant \bar{c}, \bar{c} \leqslant c$, 由之 $\bar{c} = c$. 因而我们这里实际上是与代数运算打交道. 对于它们条件(1)和(3)是显然成立的. 作为示范, 下面来验证对乘法的条件(2). 因为, 依 I

$$a(bc) \leqslant a$$

$$a(bc) \leqslant bc \leqslant b$$

$$a(bc) \leqslant bc \leqslant c$$

则又由 I 有

$$a(bc)\leqslant ab$$

$$a(bc)\leqslant(ab)c.$$

类似地有$(ab)c\leqslant a(bc)$，由之依 2)得 $a(bc)=(ab)c$.

最后，我们来证明条件(4)是成立的．依 I 由 $ab=a$ 得 $a\leqslant b$，即 $b\geqslant a$，又因为依 1)还有 $b\geqslant b$，故依 II $b\geqslant a+b$．另一方面，由于 II 有 $b\leqslant a+b$．因此依 2)得 $a+b=b$．反过来也是对的．

这样，第二个定义可以从第一个推出．今证，第一个也可由第二个推出．假若在集$S$中定义了具有性质(1)—(4)的运算，则当元素 $a,b$ 间有等式 $ab=a$ 和 $a+b=b$ 之一，这时依(4)也必有另一个等式，我们就令 $a\leqslant b$．这就在集$S$中引入偏序．事实上，由(3)有 $a\leqslant a$．其次，若同时有 $a\leqslant b$ 和$b\leqslant a$，则 $ab=a$，$ba=b$；但由(1) $ab=ba$，故 $a=b$．最后，若 $a\leqslant b, b\leqslant c$，即有 $ab=a, bc=b$，则由(2)有

$$ac=(ab)c=a(bc)=ab=a,$$

即有 $a\leqslant c$.

现在来证公理 I 成立．由

$$(ab)a=a(ba)=a(ab)=(aa)b=ab$$

得 $ab\leqslant a$．类似地 $ab\leqslant b$．这时若从$S$中任取一元 $c'$，它满足条件 $c'\leqslant a, c'\leqslant b$，即有 $c'a=c', c'b=c'$，则

$$c'(ab)=(c'a)b=c'b=c',$$

由之得 $c'\leqslant ab$．这样，元素 $ab$ 是元素 $a, b$ 在公理 I 意义下的积．类似地可证明，元素 $a+b$ 是元素 $a,b$ 在公理 II 意义下的和．

一个群$G$的所有子群之集是格的一个例子，且对群论说是重要的例子．*在子群集中子群之间的集合包含关系起序关系的作用，两个子群的交就是它们在格论意义下的积，两个子群的并(即指由它们生成的子群）就是它们在格论意义下的和．*一个群的所有正规子群的集，以及一般地一个给定群关于某个算子域的所有

容许子群之集对于这些运算都是格.

格 $S$ 的子集 $S'$ 叫作 $S$ 中的一个子格，如果关于在 $S$ 中定义的运算它是一个格，即是对其中任意两个元素它还包含这两元素的积与和. 例如，正规子群的格是此群的所有子群之格的一个子格，因为正规子群的交与并仍是正规子群. 应当特别强调一下，在定义子格时利用的是定义在格中的运算，而不是偏序关系：格 $S$ 的一个子集，它关于 $S$ 中的偏序关系作成一个格，但它不是永远也就满足上面给出的子格定义.

在格 $S$ 的元素中可能存在一个元素，它含于格的任意其他元素中. 这个(如果它存在，则必是唯一的)元素记作符号 0 并称之为格的*零元*；显然，它满足条件，对任意 $a\in S$，

$$a\cdot 0=0, \qquad a+0=a.$$

格 $S$ 还可能具有这样的元素，它包含任意其他元素. 此元素用符号 1 表之并称之为格的*单位元*；它满足条件：对任意 $a\in S$，

$$a\cdot 1=a, \qquad a+1=1$$

*在群 $G$ 的所有子群之格中单位子群 $E$ 起零元的作用，而整个群 $G$ 起单位元的作用.*

格 $S$ 和 $S'$ 叫作*同构的*，如果在它们的元素间可以建立一个一一对应，且在此对应下 $S$ 中两个任意元素之和映到 $S'$ 中其象之和上，而它们的积映到其象之积上. 利用存在于格的运算和偏序之间的连系，还可将这说成是，格的同构对应是它们间的一个一一对应，且它保持存在于这些格内的序关系.

*完备格* 在谈到一个群的子群格或正规子群格时，我们只是利用对*有限*个子群或正规子群的交和并之存在性. 但在实际上在群中任意多个子群之并和交和任意多个正规子群之并和交都是一意确定的. 群的所有子群的全体，还有所有正规子群的全体或者更一般地在某一算子域下所有容许子群的全体都是一种称作完备

格的结构的例子.

偏序集 $S$ 叫作完备格,如果对 $S$ 中任意元素 $a_\alpha$($\alpha$ 历遍一个足码集 $M$)的集在 $S$ 中存在具有下面性质的元素 $c$ 和 $d$:

1) 对所有 $\alpha\in M$ 有 $c\leqslant a_\alpha$,并且若某一元素 $c'$ 也满足条件:对所有 $\alpha\in M$, $c'\leqslant a_\alpha$,则 $c'\leqslant c$.

2) 对所有 $\alpha\in M$ 有 $d\geqslant a_\alpha$,并且若某一元素 $d'$ 也满足条件:对所有 $\alpha\in M$, $d'\geqslant a_\alpha$,则 $d'\geqslant d$.

一意确定的元素 $c$ 和 $d$ 依次叫作元素 $a_\alpha$, $\alpha\in M$, 的积与和,并用符号记作

$$c=\prod_{\alpha\in M}a_\alpha,\quad d=\sum_{\alpha\in M}a_\alpha.$$

容易明白, 任意完备格也是格, 因此对有限积与和仍使用过去使用的记法.

完备格的定义也可采用下面形式.

集 $S$ 叫作完备格, 如果在其中对任意子集唯一地定义了积与和,并且满足格的定义中之条件(4),以及下面条件:若在 $S$ 中给定元素 $a_\alpha$, $\alpha\in M$ 且若足码集 $M$ 任意地表成子集 $M_\beta$, $\beta\in N$, 的并,则有

$$\prod_{\beta\in N}\Big(\prod_{\alpha\in M_\beta}a_\alpha\Big)=\prod_{\alpha\in M}a_\alpha \tag{5}$$

$$\sum_{\beta\in N}\Big(\sum_{\alpha\in M_\beta}a_\alpha\Big)=\sum_{\alpha\in M}a_\alpha \tag{6}$$

它的特殊情形就是格的定义中之条件(1),(2)和(3).

从完备格的第一个定义可得第二个定义. 事实上,我们知道,由第一个定义可得条件(4). 剩下要证的是等式(5)和(6). 我们来证其中的一个,譬如第一个. 设

$$\prod_{\alpha\in M}a_\alpha=c,\quad \prod_{\alpha\in M_\beta}a_\alpha=c_\beta,\quad \prod_{\beta\in N}c_\beta=\bar{c}.$$

此时 $c\leqslant a_\alpha$, $\alpha\in M_\beta$, 即有 $c\leqslant c_\beta$, 因而 $c\leqslant\bar{c}$. 另一方面，对任意 $\alpha\in M$ 有 $N$ 中的 $\beta$, 使得 $\alpha\in M_\beta$, 因而 $c_\beta\leqslant a_\alpha$. 由之得

$$\bar{c}\leqslant c_\beta\leqslant a_\alpha,\quad \alpha\in M,$$

即有 $\bar{c}\leqslant c$. 这样便有等式 $c=\bar{c}$, 即证明了(5).

由完备格的第二个定义可得第一个. 事实上, 我们知道, 由它可得 $S$ 是格, 并且 $a\leqslant b$, 当且仅当 $ab=a$, 随之, $a+b=b$. 今设在 $S$ 中给出任意元素 $a_\alpha$, $\alpha\in M$, 的集合并设

$$\prod_{\alpha\in M}a_\alpha=c.$$

此时由于(5)对任意 $\alpha_0\in M$ 有

$$a_{\alpha_0}c=a_{\alpha_0}\cdot\prod_{\alpha\in M}a_\alpha=\prod_{\alpha\in M}a_\alpha=c,$$

即对所有 $\alpha\in M$ 有 $c\leqslant a_\alpha$. 另一方面, 若对所有 $\alpha\in M$ 元素 $c'$ 有性质 $c'\leqslant a_\alpha$, 即 $c'a_\alpha=c'$, 则再依(5)有

$$c'c=c'\prod_{\alpha\in M}a_\alpha=\prod_{\alpha\in M}(c'a_\alpha)=\prod_{\alpha\in M}c'=c',$$

由此有 $c'\leqslant c$. 对于元素 $a_\alpha$, $\alpha\in M$, 的和可以得到类似的结果.

任意完备格有零元和单位元. 它们顺序为格中所有元素的积与和.

## § 44. Dedekind 格和完全 Dedekind 格

格定义中公理(4)给出格运算乘法和加法之间的联系. 这联系是非常弱的. 在很多情况, 看来有必要对所研究的格附加以补充的限制, 使得这个联系更紧密一些. 对我们最习惯的当然是分配律

$$(a+b)c=ac+bc.$$

一个格, 如果在其中这个律对任意三个元素都成立, 则称之为分配格, 它在数学的许多部门中是格的一个很自然的类型, 但对群论来

说这个限制是太强了. 实际上, 其所有子群的格是分配格的群组成一个非常窄的类, 这可由下面的定理(Ore[6])看出.

一个群具有分配子群格, 当且仅当它或者是循环群或者是循环群的递增列的并.

事实上, 若给定一个无限循环群$\{a\}$, 则此群的任意子群具有形如$a^k$, $k\geqslant 0$, 的唯一生成元. 易见, 当$k\geqslant 0$, $l\geqslant 0$时

$$\{a^k\}\cap\{a^l\}=\{a^{[k,l]}\},\ \{a^k\}\cdot\{a^l\}=\{a^{(k,l)}\},$$

其中$[k, l]$是$k$, $l$的最小公倍数, $(k, l)$是它们的最大公因数. 换言之, 无限循环群的子群格同构于非负整数格, 其中格的乘法是取最小公倍而格的加法是取最大公约, 亦即把关系$m\leqslant n$取为关系«$n$整除$m$». 证明以上这个格的分配性是没有什么困难的: 若素数$p$的$\alpha$, $\beta$和$\gamma$次幂顺序整除$k$, $l$和$m$, 则数$p$的$\max(\min(\alpha, \beta), \gamma)$和$\min(\max(\alpha, \gamma), \max(\beta, \gamma))$次幂就顺序整除数$[(k, l), m]$和$([k, m], [l, m])$; 但易见这些指数是相等的.

用同样方法可以证明, $n$阶有限循环群的子群格同构于数$n$的所有正因数作成的格, 其格运算和上面的一样. 此格是上面刚谈到的格之子格因而也是分配格. 至于循环群升列之并的子群格是分配的, 则它易从上面说过的得出.

转来证明反方向的结论. 先假设给我们的群$G$有两个生成元, $G=\{a, b\}$, 具有分配子群格但不是循环群. 引入记号

$$A=\{a\},\quad B=\{b\};$$

其次, 约定, 所谓一个元素$c$关于某个子群$U$的阶, 是这样的最小正指数$n$, 如果它存在的话, 可使得元素$c$的$n$次幂恰好进入$U$中, 否则就规定阶为零. 设元素$c$不在子群$A$和$B$中且关于这些子群依次有阶$n_1$和$n_2$. 此时

$$(\alpha)\qquad \{c\}\cap A=\{c^{n_1}\},\quad \{c\}\cap B=\{c^{n_2}\}.$$

其次, 由

$$\{A, B\} \cap \{c\} = G \cap \{c\} = \{c\}$$

并利用分配律可得

$$\{A \cap \{c\}, B \cap \{c\}\} = \{c\}.$$

换言之, $\{c^{n_1}, c^{n_2}\} = \{c\}$, 即是存在整数 $x$ 和 $y$, 使得

$$c^{n_1 x + n_2 y} = c.$$

注意到元素的选择, 知数 $n_1$ 和 $n_2$ 异于 1, 除此之外, 若元素 $c$ 在 $G$ 中有有限阶 $n$, 则 $n_1, n_2$ 必是 $n$ 的因数, 故它们中任一个都不等于 0. 由之可得元素 $a$ 以及元素 $b$ 关于交 $D = A \cap B$ 的阶 $m_1$ 和 $m_2$ 也都异于零, 并且显然这些阶和在子群 $A$ 和 $B$ 中生成元 $a, b$ 的选择无关. 为了以后我们将认定这些生成元的选择满足关系 $a^{m_1} = b^{m_2} = d$; 这样选择生成元是可能的, 因为这可由以下事实得出: 若在循环群中给定一指数 $m$ 的子群, 则此子群的任意生成元是群的某个生成元的 $m$ 次幂.

*数 $n_1$ 和 $n_2$ 是互素的.* 当 $c$ 有无限阶时, 这是显然的, 在相反的情况, 这可由

$$n_1 x + n_2 y \equiv 1 (\bmod n)$$

得出, 因为 $n_1$ 是 $n$ 的因数. 这样, 存在数 $x_0$ 和 $y_0$, 使得 $n_1 x_0 + n_2 y_0 = 1$.

今令 $c = b^{-1}ab$. 由等式$(\alpha)$得, 元素 $b^{-1}a^{n_1}b$ 含在子群 $A$ 中且元素 $a^{n_2}$ 等于元素 $b$ 的某个幂因而与 $b$ 是可换的. 由之得

$$b^{-1}ab = b^{-1}a^{n_1 x_0} b \cdot b^{-1} a^{n_2 y_0} b = (b^{-1}a^{n_1}b)^{x_0} \cdot a^{n_2 y_0} \in A.$$

类似地 $a^{-1}ba \in B$. 这就证明了子群 $A, B$ 是 $G$ 中的正规子群.

现在来证, *数 $m_1$ 和 $m_2$ 也是互素的*. 实际上, 若是它们有一个共同素因数 $p$, 则顺序在 $A$ 和 $B$ 中就将能找到元素 $a'$ 以及 $b'$, 它们不在 $D$ 内且关于 $D$ 有阶 $p$, 且 $a'^p = b'^p = d$. 这时元素 $c = a'b'$ 将不在子群 $A$ 和 $B$ 中; 但是, 利用这些子群的不变性, 我们将有 $c^p \in A$ 和 $c^p \in B$. 这和上面证过的元素 $c$ 关于 $A$ 和 $B$ 的阶是互素的相

矛盾．

易见，换位子 $d_0=a^{-1}b^{-1}ab$ 含在$D$中．由等式 $ab=bad$，并注意到元素 $d_0$ 和元素 $a$ 与 $b$ 是可换的，用一下归纳法可得对所有正整数 $i$ 和 $j$ 有等式

$$ab^i=b^iad_0^i,\qquad a^jb=ba^jd_0^j.$$

在这些等式中令 $i=m_2$, $j=m_1$，我们有

$$d_0^{m_1}=d_0^{m_2}=1,$$

由之得 $d_0=1$，即 $ab=ba$．这样群$G$就是个阿贝尔群．若取数 $u$ 和 $v$ 满足等式$m_1v+m_2u=1$，则与开始时的假设相反，$G$还是以$a^ub^v$为生成元的循环群．

现在设给定具有分配子群格的任意一个群$G$．由上面证过的得，$G$的任意两个，因而任意有限多个元素生成一个循环子群．这样，群$G$是阿贝尔群，并且或者是无扭群或者是周期群．在第一种情况它是秩为1的群，因而如§30 中所示它是无限循环群的递增列之并，而在第二种情况依§19 群$G$可分解成对于不同素数$p$的准素群之直积．任意一个这样的准素因子仅有唯一的$p$阶循环子群，因而它或者是阶为某个$p^n$的有限循环群，或者是$p^\infty$型群．然而容易看出，$p^\infty$型群的直积，其中$p$历遍所有不同的素数 $p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots$，是一些有限循环群递增列之并，这些群具有阶 $p_1, p_1^2p_2, p_1^3p_2^2p_3, \cdots$ 等等．此群的任意子群也是有限循环群的递增列之并．这样，定理证完．

对群论有着极大好处的是 Dedekind 格，它组成一个较分配格广泛得多的格类，Dedekind 格和分配格的差别在于假设分配律

$$(a+b)c=ac+bc$$

仅在下面条件下是成立的：括号内的和中有一个被加项，例如$a$，包含在$c$中，因而这时也有$ac=a$．换言之，格$S$叫作 Dedekind 格，

如果满足条件

(D) 若 $a \leqslant c$, 则 $(a+b)c = a+bc$.

可以用许多和(D)等价的其他形式给出 Dedekind 格的定义. 今指出下面一个定义，它经常是很有益的：格 $S$ 是 Dedekind 格当且仅当满足条件

(D′) 若给出元素 $a, b$ 和 $c$, 并且 $a \leqslant b$, 且若

$$ac = bc, \qquad a+c = b+c,$$

则 $a = b$.

今证条件(D)和(D′)的等价性. 设条件(D)被满足并设在 $S$ 中给定元素 $a, b$ 和 $c$, 使得 $a \leqslant b$, $ac = bc$ 和 $a+c = b+c$. 这时有

$$(a+c)b = (b+c)b = b;$$

另一方面, 由(D)有

$$(a+c)b = a+cb = a+ac = a,$$

由之得 $a = b$.

现在设条件(D′)被满足并设在 $S$ 中给定元素 $a$, $b$ 和 $c$ 且 $a \leqslant c$. 引入记号:

$$\bar{a} = a+bc, \quad \bar{b} = (a+b)c, \quad \bar{c} = b.$$

因为 $a+bc \leqslant a+b$ 及 $a+bc \leqslant c$, 故 $\bar{a} \leqslant \bar{b}$. 其次, 由 $a+bc \leqslant c$ 得 $(a+bc)b \leqslant bc$, 又因为 $a+bc \geqslant bc$, $b \geqslant bc$, 由之 $(a+bc)b \geqslant bc$, 故有 $\bar{a}\bar{c} = bc$. 另一方面, 由于 $a+b \geqslant b$ 有

$$\bar{b}\bar{c} = (a+b)cb = bc,$$

即 $\bar{a}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}$. 最后, 由于 $bc \leqslant b$ 有

$$\bar{a}+\bar{c} = a+bc+b = a+b.$$

另一方面, 由 $(a+b)c \geqslant a$ 得 $(a+b)c+b \geqslant a+b$, 又因为 $(a+b)c \leqslant a+b$, $b \leqslant a+b$, 故 $(a+b)c+b \leqslant a+b$, 即有 $\bar{b}+\bar{c} = a+b$, 由之得 $\bar{a}+\bar{c} = \bar{b}+\bar{c}$. 这时把条件(D′)应用到元素 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ 上便得 $\bar{a} = \bar{b}$, 即 $a+bc = (a+b)c$.

对于群论, Dedekind 格的意义基于下面定理.

*任意一个群的所有正规子群的格是 Dedekind 格.*

我们使用条件(D′)来证明. 设在群$G$中给出正规子群$A, B$和$C$, 且 $A\subseteq B, A\cap C=B\cap C, \{A, C\}=\{B, C\}$. 因为 $B\subseteq\{A, C\}$, 故$B$中任意元素 $b$ 具有形式 $b=ac$, 其中 $a\in A, c\in C$. 由之 $c=a^{-1}b$, 即 $c\in B$, 因而 $c\in(B\cap C)=(A\cap C)$, 即 $c\in A$. 由之得 $b\in A$, 即有 $B=A$.

因为 Dedekind 格的任意子格显然是 Dedekind 格, 故由刚证过的定理得, 群$G$关于含所有内自同构的某个算子域的容许子群作成的格是 Dedekind 格. 至于谈到一个群的所有子群之格, 则它不永远是Dedekind 格——读者不难验证, 4 次交代群的子群格可作为这种反例. 另一方面, 存在有一些群, 它们的所有子群格是 Dedekind 格, 但不是它们所有的子群都是正规子群; 例如 3 次对称群就是这样的. 研究具 Dedekind 子群格的群有 Iwasawa [1, 3], Jones[1]和 Zappa[3]. (参看补充 14.2).

在以后还将用到 Dedekind 格的定义的下面这个形式.

(D″) 若在格$S$中给出元素

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \quad y_1, \quad y_2, \cdots, y_n, \quad n\geqslant 1,$$

而且

$$x_i\leqslant y_j, \quad 当\ i\neq j, i, j=1, 2, \cdots, n,$$

则

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)y_1y_2\cdots y_n=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

事实上, 条件(D)是条件(D″)的特殊情况, 这只要在(D″)中令 $n=2$ 和 $y_1=x_1+x_2$, 便得

$$(x_1+x_2)y_2=x_1+x_2y_2, \quad 当\ x_1\leqslant y_2.$$

反之, 若条件(D)被满足且若元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 适合条件 $x_i\leqslant y_j$, 当 $i\neq j$, 则反复应用(D)便得

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n)y_1y_2\cdots y_n\\
&\quad=(x_1y_1+x_2+\cdots+x_n)y_2\cdots y_n\\
&\quad=(x_1y_1+x_2y_2+x_3+\cdots+x_n)y_3\cdots y_n\\
&\quad=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.
\end{aligned}
$$

正规列和主列. 设给一个带零元和单位元的格 $S$. 元素的有序有限集

$$0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}<a_k=1 \tag{1}$$

叫作格 $S$ 的一个正规列; 数 $k$ 叫作此列的长度. 正规列

$$0=b_0<b_1<b_2<\cdots<b_{l-1}<b_l=1 \tag{2}$$

叫作列(1)的加密, 若(1)中任一元素 $a_i$ 等于(2)中某个 $b_j$.

在Dedekind 格的情形有下面**定理**.

Dedekind 格中任意两个正规列具有同样长度的加密.

事实上, 设在 Dedekind 格 $S$ 中给定任意正规列(1)和(2). 令

$$a_{ij}=a_i+a_{i+1}b_j,\quad i=0,1,\cdots,k-1,\ j=0,1,\cdots,l;$$

$$b_{ji}=b_j+b_{j+1}a_i,\quad j=0,1,\cdots,l-1,\ i=0,1,\cdots,k.$$

因为

$$a_{i_0}=a_i,\quad a_{il}=a_{i+1}$$

及

$$a_{ij}\leqslant a_{i,\,j+1},\quad j=0,1,\cdots,l-1,$$

则元素 $a_{ij}$ 组成正规列, 可能有重复者, 且是列(1)的加密. 同样地元素 $b_{ji}$ 组成列(2)的加密. 这两个新列有相同的长度 $kl$, 因而剩下来要说明的是它们具有相同的重复数.

事实上, 设

$$a_{ij}=a_{i,\,j+1}. \tag{3}$$

依次利用元素 $a_{i,\,j+1}$ 的定义, 等式(3), 不等式 $a_{ij}\leqslant a_{i+1}$, 元素 $a_{ij}$

的定义，以及最后，条件(D)和不等式 $a_{i+1}b_j<b_{j+1}$，我们便有下面一系列等式：

$$\begin{aligned} a_{i+1}b_{j+1} &= a_{i,\, j+1}(a_{i+1}b_{j+1}) \\ &= a_{ij}(a_{i+1}b_{j+1}) \\ &= a_{ij}b_{j+1} \\ &= (a_i+a_{i+1}b_j)b_{j+1} \\ &= a_ib_{j+1}+a_{i+1}b_j. \end{aligned}$$

这个结果与元素 $b_{ji}$ 和 $b_{j,\, i+1}$ 的定义以及明显的不等式 $a_{i+1}b_j\leqslant b_j$ 一起便引出下列等式

$$\begin{aligned} b_{ji} &= b_j+b_{j+1}a_i \\ &= b_j+b_{j+1}a_i+a_{i+1}b_j \\ &= b_j+a_{i+1}b_{j+1} \\ &= b_{j,\, i+1}. \end{aligned}$$

我们这就证明了，在我们上面作出的正规列(1)和(2)的加密中重复的元素间存在一个一一对应，即是可以被同时舍掉．这就把定理证完．

称格中的一个正规列为此格的*主列*，如果它没有不带重复的加密．和在§16 中一样，由我们刚证过的定理可得下列结果．

*若 Dedekind 格有主列，则其所有主列有相同的长度．*

*若 Dedekind 格有主列，则其任意正规列可以加密成主列．*

由之得，*具有主列的 Dedekind 格的任意子格本身也有主列．*

最后，*Dedekind 格有主列当且仅当其中元素组成所有升链和降链都中断．*

Dedekind 格的定义(条件(D′))说明，任意非 Dedekind 格必含有一个子格，它由五个元素组成且有两个具不同长度的主列，即长度为 2 和 3 者．因而，我们有可能再给 Dedekind 格一个新的刻

划：一个格是 Dedekind 格当且仅当在其任意具有主列的格中，所有主列有相同的长度。

上面证明的关于格的正规列的定理其实还可以再加强一些，使得由之可完全推得群论中关于主列同构的定理(参看 Ore[1]，以及本书第一版 § 51)．有一系列的研究工作，是阐明把群的合成列的 Jordan-Hölder 定理搬到格(已不一定是 Dedekind 格了)论中的问题的．附带指出与这些有关的工作 Ore[5]，Курош[11]，以及相接续的工作 Узков[1]，Korinek[4]和Лившиц[1]．

完全 Dedekind 格．Didekind 格的概念也可应用到完备格的情形．但为了建立直分解的理论，不得不对完备格附加更强的条件(参看 Курош [13])，即是：完备格 $S$ 叫完全 Dedekind 格，如果对于任意满足条件

$$x_\alpha \leqslant y_\beta, \quad \text{当 } \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in M$$

的元素 $x_\alpha$和 $y_\alpha$($\alpha$ 历遍某个足码集$M$)的集合有等式

$$(\overline{\mathrm{D}}) \qquad \left(\sum_{\alpha\in M} x_\alpha\right)\cdot \prod_{\alpha\in M} y_\alpha = \sum_{\alpha\in M} x_\alpha y_\alpha .$$

任意完全 Dedekind 格是 Dedekind 格，因为条件(D'')可由完全 Dedekind 格的定义得出．但是反过来不成立——存在有完备格且是 Dedekind 格，甚至还是分配格，但不是完全 Dedekind 格．

下面定理确定了此格类对群论的意义．

具任意算子系的群之(容许)正规子群格是完全Dedekind 格．

事实上，设在群$G$ 中给出正规子群系 $X_\alpha$ 和 $Y_\alpha$(足码 $\alpha$ 取遍集 $M$)，并且

$$X_\alpha \subseteq Y_\beta, \quad \text{当 } \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in M. \tag{4}$$

若是元素 $a$ 在所有 $X_\alpha$ 的积中，则它可写成

$$a = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_n}, \quad n \geqslant 1, \quad x_{\alpha_i} \in X_{\alpha_i} \tag{5}$$

且所有足码 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是不相同的. 若元素 $a$ 还含在所有 $Y_\alpha$ 之交中,则它当然更在 $Y_{\alpha_i}$ 中. 依照(4),积(5)中除去 $x_{\alpha_i}$ 的所有因子也都在 $Y_{\alpha_i}$ 中, 因而也有 $x_{\alpha_i} \in Y_{\alpha_i}$, 即 $x_{\alpha_i} \in (X_{\alpha_i} \cap Y_{\alpha_i})$. 这就证明了元素 $a$ 含在所有交 $X_\alpha \cap Y_\alpha$ 之积中,即证明了要证的等式($\overline{\text{D}}$)的左侧在这种情形含在该等式的右侧. 由于当 $\alpha \neq \beta$ 时有条件 $x_\alpha \leqslant y_\beta$, 反面的那个包含关系在任意完备格中都是成立的.

## § 45. 完全 Dedekind 格中的直和

在 § 17 中所熟习的群的直分解之诸定义里, 有一个仅利用了群的正规子群的交和并. 这使得我们可把直积概念移植到任意完全Dedekind 格中.

设完全 Dedekind 格 $S$ 的一个元素 $a$ 是元素 $a_\alpha$ 的和, 其中 $\alpha$ 历遍足码集 $M$

$$a = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha.$$

引入记号

$$\bar{a}_\alpha = \sum_{\beta \in M, \beta \neq \alpha} a_\beta.$$

元素 $a$ 是元素 $a_\alpha, \alpha \in M$ 的直和,如果对任意 $\alpha \in M$ 有等式

$$a_\alpha \bar{a}_\alpha = 0.$$

为了表示元素 $a$ 的直和分解将使用下面符号:

$$a = \dot{\sum_{\alpha \in M}} a_\alpha$$

或者在有限个被加项时,写作:

$$a = a_1 \dotplus a_2 \dotplus \cdots \dotplus a_n.$$

元素 $\bar{a}_\alpha$ 被称为此直分解中直被加项 $a_\alpha$ 的补项.

显然, 群的直分解和此群的正规子群格中单位元的直分解是

一致的.

以后将用到完全 Dedekind 格中直和的下列性质.

**I.** 若

$$a=\dot{\sum_{\alpha}}a_{\alpha}, \tag{1}$$

且若所有或者一部分直被加项 $a_{\alpha}$ 本身可分解成直和

$$a_{\alpha}=\dot{\sum_{\beta}}a_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

则

$$a=\dot{\sum_{\alpha,\beta}}a_{\alpha\beta}.$$

事实上，元素 $a$ 是所有元素 $a_{\alpha\beta}$ 的和——参看 § 43 中完备格的第二个定义. 另一方面，固定足码 $\alpha$ 和 $\beta$ 并依次利用不等式 $a_{\alpha\beta}\leqslant a_{\alpha}$, 格的 Dedekind 性以及分解(1)、(2)是直分解，可得

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}\Big(\sum_{\gamma\neq\alpha}a_{\gamma}+\sum_{\delta\neq\beta}a_{\alpha\delta}\Big) &= a_{\alpha\beta}\ a_{\alpha}\Big(\sum_{\gamma\neq\alpha}a_{\gamma}+\sum_{\delta\neq\beta}a_{\alpha\delta}\Big)\\ &= a_{\alpha\beta}\Big(a_{\alpha}\sum_{\gamma\neq\alpha}a_{\gamma}+\sum_{\delta\neq\beta}a_{\alpha\delta}\Big)\\ &= a_{\alpha\beta}\sum_{\delta\neq\beta}a_{\alpha\delta}\\ &= 0. \end{aligned}$$

**II.** 若

$$a=\dot{\sum_{\alpha\in M}}a_{\alpha},$$

$N$ 是集 $M$ 的真子集，而

$$b=\sum_{\alpha\in N}a_\alpha \qquad c=\sum_{\alpha\in M-N}a_\alpha,$$

则 $bc=0$.

事实上，利用不等式 $a_\alpha\leqslant\bar{a}_\beta$, $\alpha\neq\beta$，而后用一下完全 Dedekind 格的定义(即等式($\overline{\mathrm{D}}$))，我们可得

$$bc=\sum_{\alpha\in N}a_\alpha\cdot\sum_{\alpha\in M-N}a_\alpha\leqslant\sum_{\alpha\in N}a_\alpha\cdot\prod_{\alpha\in N}\bar{a}_\alpha=\sum_{\alpha\in N}a_\alpha\bar{a}_\alpha=0.$$

III. 若

$$a=\dot{\sum_{\alpha\in M}}a_\alpha,$$

而集合 $M$ 划分成互不相交的子集 $M_\beta$，且

$$\sum_{\alpha\in M_\beta}a_\alpha=b_\beta,$$

则

$$a=\dot{\sum_{\beta}}b_\beta.$$

事实上，元素 $a$ 是元素 $b_\beta$ 之和，这可以从完备格的定义得出. 另一方面，由性质 II 可得

$$b_\beta\cdot\sum_{\gamma\neq\beta}b_\gamma=\sum_{\alpha\in M_\beta}a_\alpha\cdot\sum_{\alpha\in M-M_\beta}a_\alpha=0.$$

IV. 若

$$a=\dot{\sum_{\alpha}}a_\alpha,$$

并对每一 $\alpha$ 选定元素 $c_\alpha$，使得

$$0\leqslant c_\alpha\leqslant a_\alpha,$$

则所有元素 $c_\alpha$ 之和 $c$ 是它们的直和．只要有一个 $c_\alpha$ 异于相应的 $a_\alpha$，此和便异于 $a$.

事实上

$$c_\alpha \cdot \sum_{\beta \neq \alpha} c_\beta \leqslant a_\alpha \cdot \sum_{\beta \neq \alpha} a_\beta = 0.$$

若是 $c = a$，则利用格的 Dedekind 性，对任意 $\beta$ 有

$$a_\beta = a_\beta a = a_\beta \sum_\alpha c_\alpha = c_\beta + a_\beta \sum_{\alpha \neq \beta} c_\alpha$$

$$\leqslant c_\beta + a_\beta \sum_{\alpha \neq \beta} a_\alpha = c_\beta.$$

V. 若

$$a + a_1 \dotplus a_2,$$

且

$$a_1 \leqslant b \leqslant a,$$

则

$$b = a_1 \dotplus b a_2.$$

事实上，利用(D)，可得

$$b = ba = b(a_1 + a_2) = a_1 + b a_2.$$

另一方面

$$a_1 \cdot b a_2 \leqslant a_1 a_2 = 0.$$

**分支**　设给定完全 Dedekind 格 $S$ 的单位元之一个直分解

$$1 = \dot{\sum_{\alpha \in M}} a_\alpha.$$

若 $b$ 是此格中任意一个元素，则称元素

$$b\varphi_\alpha = a_\alpha(b + \bar{a}_\alpha), \tag{4}$$

为 $b$ 在分解(3)的直被加项 $a_\alpha$ 中的分支，这里 $\bar{a}_\alpha$ 和前面一样是 $a_\alpha$ 在直分解(3)中的补项.

若给定群$G$的一个直分解

$$G=\prod_{\alpha}A_\alpha,$$

而$B$是$G$的一个正规子群，则$B\varphi_2$等于正规子群$B$在分解(5)的直因子$A_\alpha$中在§17意义下的分支．事实上，$B$中元素$b$有记法

$$b=a_\alpha\bar{a}_\alpha,\quad a_\alpha\in A_\alpha,\quad \bar{a}_\alpha\in\bar{A}_\alpha,$$

由之得

$$a_\alpha=b\bar{a}_\alpha^{-1},$$

即元素$b$的分支$a_\alpha$既在$A_\alpha$中，也在积$B\bar{A}_\alpha$中．反之，如果$x$是交$A_\alpha\cap B\bar{A}_\alpha$中任意元素，则它有形如

$$x=b\bar{a}_\alpha$$

的记法，因而是元素$b$在直因子$A_\alpha$的分支．

群$G$到自身内的映射，它把任意元素映到该元素在$A_\alpha$中的分支，显然是群$G$的一个自同态，当$G$是带算子的群，它也是带算子的自同态．对所有$\alpha$得到的这些自同态叫作群$G$的所给直分解的自同态．由于这个原因在我们这个一般情形也称格$S$的映射$\varphi_\alpha$，$\alpha\in M$，为直分解(3)的自同态．这是一些单调映射：若$b\leqslant c$，则$b\varphi_\alpha\leqslant c\varphi_\alpha$．

由直分解(3)可得直分解

$$1=a_\alpha\dotplus\bar{a}_\alpha.$$

元素$b$在此分解的直被加项$\bar{a}_\alpha$中的分支是

$$b\bar{\varphi}_\alpha=\bar{a}_\alpha(b+a_\alpha)$$

映射$\bar{\varphi}_\alpha$将称作对于直分解的自同态$\varphi_\alpha$的补映射．

指出映射$\varphi_\alpha$的一些性质．由(4)直接有：

**VI.** 对任意$b\in S$，

$$b\varphi_\alpha\leqslant a_\alpha.$$

若$b\geqslant a_\alpha$，则

$$b\varphi_\alpha = a_\alpha$$

VII. 若 $b \leqslant a_\alpha$, 则

$$b\varphi_\alpha = b.$$

事实上, 利用(D)有:

$$b\varphi_\alpha = a_\alpha(b + \bar{a}_\alpha) = b + a_\alpha \bar{a}_\alpha = b.$$

VIII. $b\varphi_\alpha = 0$ 当且仅当 $b \leqslant \bar{a}_\alpha$.

事实上, 设 $b\varphi_\alpha = 0$. 因为 $b + \bar{a}_\alpha \geqslant \bar{a}_\alpha$, 故依 V 有

$$b + \bar{a}_\alpha = (b + \bar{a}_\alpha)a_\alpha + \bar{a}_\alpha, \tag{6}$$

因而依 (D)有

$$\begin{aligned} 0 = b\varphi_\alpha &= a_\alpha(b + \bar{a}_\alpha) \\ &= a_\alpha[(b + \bar{a}_\alpha)a_\alpha + \bar{a}_\alpha] \\ &= (b + \bar{a}_\alpha)a_\alpha + a_\alpha \bar{a}_\alpha \\ &= (b + \bar{a}_\alpha)a_\alpha. \end{aligned}$$

等式(6)这时就变成

$$b + \bar{a}_\alpha = \bar{a}_\alpha,$$

即有 $b \leqslant \bar{a}_\alpha$. 反向的断语可由(4)得到.

由 VI 和 VIII 得

IX. 对 $S$ 中任意元素 $b$ 以及任意足码 $\alpha$

$$b\bar{\varphi}_\alpha \varphi_\alpha = b\varphi_\alpha \bar{\varphi}_\alpha = 0,$$

其中 $\bar{\varphi}_\alpha$ 是分解(3)之自同态 $\varphi_\alpha$ 的补映射.[1]

X. 任意元素 $b$ 含在它在直分解(3)的所有被加项 $a_\alpha$ 的分支之和中.

事实上, 因为 $a_\alpha \leqslant b + \bar{a}_\beta$, $\alpha \neq \beta$, 则利用(D)和(3)有

$$\sum_\alpha b\varphi_\alpha = \sum_\alpha a_\alpha(b + \bar{a}_\alpha)$$

---

1) 这里以及后面, 映射之积指依次施行这些映射.

$$=\sum_{\alpha}a_{\alpha}\cdot\prod_{\alpha}(b+\bar{a}_{\alpha})=\prod_{\alpha}(b+\bar{a}_{\alpha})\geqslant b.$$

XI. 和的分支等于分支的和, 即若

$$b=\sum_{\beta}b_{\beta}$$

则

$$b\varphi_{\alpha}=\sum_{\beta}b_{\beta}\varphi_{\alpha}.$$

事实上, 由 $b_{\beta}\leqslant b$ 得 $b_{\beta}\varphi_{\alpha}\leqslant b\varphi_{\alpha}$, 因而也有

$$\sum_{\beta}b_{\beta}\varphi_{\alpha}\leqslant b\varphi_{\alpha}.$$

另一方面, 由 X 和 VI 知

$$b=\sum_{\beta}b_{\beta}\leqslant\sum_{\beta}b_{\beta}\varphi_{\alpha}+\bar{a}_{\alpha},$$

因而利用(4), (D)及 VI, 我们有

$$b\varphi_{\alpha}\leqslant\left(\sum_{\beta}b_{\beta}\varphi_{\alpha}+\bar{a}_{\alpha}\right)\varphi_{\alpha}=a_{\alpha}\left(\sum_{\beta}b_{\beta}\varphi_{\alpha}+\bar{a}_{\alpha}\right)$$

$$=\sum_{\beta}b_{\beta}\alpha_{\alpha}+a_{\alpha}\bar{a}_{\alpha}=\sum_{\beta}b_{\beta}\varphi_{\alpha}.$$

XII. 设 $N$ 是分解(3)之足码集合 $M$ 的子集, 而

$$a=\sum_{\alpha\in N}a_{\alpha},\quad \bar{a}=\sum_{\alpha\in M-N}a_{\alpha},$$

即依 III 有直分解

$$1=a\dotplus\bar{a}. \tag{7}$$

若 $b$ 是格 $S$ 的任意元素, 而 $b\psi$ 是它在直分解(7)之被加项 $a$ 中的分支, 则

$$b\psi\leqslant\sum_{\alpha\in N}b\varphi_{\alpha}.$$

事实上，因为对所有 $\alpha\in N$ 有

$$b+\bar{a}\leqslant b+\bar{a}_\alpha,$$

即

$$b+\bar{a}\leqslant\prod_{\alpha\in N}(b+\bar{a}_\alpha),$$

故由($\overline{\mathrm{D}}$)有

$$b\psi=a(b+\bar{a})\leqslant\sum_{\alpha\in N}a_\alpha\cdot\prod_{\alpha\in N}(b+\bar{a}_\alpha)$$

$$=\sum_{\alpha\in N}a_\alpha(b+\bar{a}_\alpha)=\sum_{\alpha\in N}b\varphi_\alpha.$$

XIII. 若 $b\varphi_\alpha=c$，则对任意元素 $c'$，$c'\leqslant c$，必有元素 $b'$，$b'\leqslant b$，使得 $b'\varphi_\alpha=c'$.

事实上，可令

$$b'=b(c'+\bar{a}_\alpha).$$

条件 $b'\leqslant b$ 是被满足的．另一方面，利用(D)，(4)以及等式 $c\bar{a}_\alpha=0$，后者是由不等式 $c=b\varphi_\alpha\leqslant a_\alpha$ 得出的，我们便有

$$\begin{aligned}b'\varphi_\alpha&=a_\alpha(b'+\bar{a}_\alpha)=a_\alpha[b(c'+\bar{a}_\alpha)+\bar{a}_\alpha]\\&=a_\alpha[(b+\bar{a}_\alpha)(c'+\bar{a}_\alpha)]\\&=c(c'+\bar{a}_\alpha)\\&=c'+c\bar{a}_\alpha=c'.\end{aligned}$$

下面在本章中引用直分解及其自同态的性质 I—XIII 时将不注明本节的号码.

共同接续的存在　设在完全 Dedekind 格 $S$ 中给定单位元的两个直分解:

$$1=\dot{\sum_\alpha}a_\alpha=\dot{\sum_\beta}b_\beta \tag{8}$$

把这些分解的自同态顺序表作 $\varphi_\alpha$ 和 $\theta_\beta$; 用 $\bar{\varphi}_\alpha$ 表示 $\varphi_\alpha$ 的补映射.

**定理**(Курош[13]) 直分解(8)具有共同接续，当且仅当对任意$\alpha$和$\beta$映射$\bar{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha$把单位元（因而也把格中所有元素）映成零，即是

$$1\bar{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha=0. \tag{9}$$

**证明** 设分解(8)有共同接续

$$1=\dot{\sum_\gamma}c_\gamma.$$

任意$c_\gamma$都含在某个积$a_\alpha b_\beta$中，因而所有这些积(对所有$\alpha$和$\beta$)之和等于单位元．同时此和还是直和．这是因为，我们有

$$\sum_{\alpha,\beta}a_\alpha b_\beta=\sum_\alpha\Big(\sum_\beta a_\alpha b_\beta\Big),$$

但是依性质 IV 右侧中每一个和都是直和，这之后再用一下性质 I 便得．这样

$$1=\dot{\sum_{\alpha,\beta}}a_\alpha b_\beta, \tag{10}$$

由之有

$$a_\alpha=\dot{\sum_\beta}a_\alpha b_\beta,\quad b_\beta=\dot{\sum_\alpha}a_\alpha b_\beta \tag{11}$$

现在来计算元素$1\bar{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha$．依 VI 和(11)

$$1\bar{\varphi}_\alpha=\bar{a}_\alpha=\sum_{\gamma\neq\alpha}\sum_\beta a_\gamma b_\beta,$$

由之利用 XI, VII 和 VIII, 我们有

$$1\bar{\varphi}_\alpha\theta_\beta=\bar{a}_\alpha\theta_\beta=\sum_{\gamma\neq\alpha}a_\gamma b_\beta\leqslant\bar{a}_\alpha,$$

因而再用 VIII 便得(9)．

反过来，今设等式(9)对所有$\alpha$和$\beta$都成立．由(8), VI 和 XI

有

$$a_\alpha = \sum_\beta b_\beta \varphi_\alpha.$$

我们利用(9)来证明，这个和是直和. 实际上，由 XI 和 D 有

$$\begin{aligned}
b_\beta\varphi_\alpha \cdot \sum_{\gamma\neq\beta} b_\gamma\varphi_\alpha &= b_\beta\varphi_\alpha\cdot \bar{b}_\beta\varphi_\alpha \\
&= a_\alpha(b_\beta+\bar{a}_\alpha)\cdot a_\alpha(\bar{b}_\beta+\bar{a}_\alpha) \\
&= a_\alpha(b_\beta+\bar{a}_\alpha)(\bar{b}_\beta+\bar{a}_\alpha) \\
&= a_\alpha[b_\beta(\bar{b}_\beta+\bar{a}_\alpha)+\bar{a}_\alpha] \\
&= \bar{a}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha = 1\bar{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

这样

$$a_\alpha = \dot{\sum_\beta} b_\beta\varphi_\alpha$$

再依 I 便得直分解

$$1 = \dot{\sum_{\alpha,\beta}} b_\beta\varphi_\alpha \tag{12}$$

是(8)中第一个分解的接续.

把(12)改写成形式

$$1 = \dot{\sum_\beta}\left(\dot{\sum_\alpha} b_\beta\varphi_\alpha\right)$$

并注意到由 X 有

$$b_\beta \leqslant \dot{\sum_\alpha} b_\beta\varphi_\alpha,$$

则根据(8)和 IV，对所有 $\beta$ 我们有

$$b_\beta = \dot{\sum_\alpha} b_\beta\varphi_\alpha.$$

这样，直分解(12)也是(8)中第二个分解的继续. 定理证完.

现在我们来把这个定理用到群上. 设$G$是带任意算子系的群且给定它的两个直分解.

$$G=\prod_{\alpha} A_{\alpha}=\prod_{\beta} B_{\beta} \tag{13}$$

用$\varphi_\alpha$, $\theta_\beta$和$\bar{\varphi}_\alpha$表示把群$G$中每一元素顺序映到它在$A_\alpha$中的，在$B_\beta$中的以及在$\bar{A}_\alpha=\prod_{\gamma\neq\alpha} A_\gamma$中的分支上的映射. 前面我们已经知道，它们是群$G$的带算子的自同态对应.

这样，映射$\bar{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha$也是带算子的自同态对应. 今证，它把群$G$的任意元素映入此群的中心中，因而把整个群$G$映到中心的容许子群上. 还在§17时我们就已知道，群中可换元素的分支本身也是相互可换的，因而，若给定两个可换元素，则其中之一的分支与另一个元素可换. 设$g$是群$G$的任意一个元素. 此时元素$g\bar{\varphi}_\alpha$在$\bar{A}_\alpha$中因而和$A_\alpha$中每一元素可换. 由之得它在(13)的第二个分解的直因子$B_\beta$中的分支，也就是元素$g\bar{\varphi}_\alpha\theta_\beta$，也和$A_\alpha$中每一元素可换. 最后，这件事对元素$g\bar{\varphi}_\alpha\theta_\beta\varphi_\alpha$也是成立的，又因为这元素本身在$A_\alpha$中，故它应在直因子$A_\alpha$的中心内，亦即在群$G$的中心内.

我们将称带算子的群$G$的中心内所有容许子群之并为它的容许中心. 由§14知道，群的中心不永远是容许的，因而容许中心是可以小于群的中心的. 由上面证得的定理可得下面结果(Fitting[3], Курош[5]).

设$G$是一个带任意算子系的群，如果映入单位元的映射是群$G$(或者，完全一样地，$G$关于其换位子群的商群)到其容许中心之唯一的带算子的同态对应[1]，则此群$G$的任意两个直分解具有共同

1) 在§47还将遇到有此性质的群，约定称之为$F$-群.

的接续.

特别,如果一个群没有中心(或者,在带算子的情形,只要没有容许中心),或者如果一个群和其换位子群相重合,则这样群的任意两个直分解有共同接续.(参看补充 5.2)

## § 46. 辅助引理

设在完全 Dedekind 格 $S$ 中给出单位元的两个直分解,每一个有两个被加项:

$$1 = a_1 \dotplus a_2 = b_1 \dotplus b_2 \tag{1}$$

把这些分解的自同态顺序记作 $\varphi_1, \varphi_2$ 和 $\theta_1, \theta_2$ 而来证明一系列引理,它们将在下一节证明基本定理时被用到.

**引理 1** 对任意元素 $x \in S$ 有

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2 = x\theta_1\varphi_2\theta_2.$$

在此等式中对调 $\theta_1$ 和 $\theta_2$,或者 $\theta$ 和 $\varphi$ 而得到的一些等式都是成立的.

实际上,由于 $x\theta_1 \leqslant b_1$ 和条件(D)有

$$\begin{aligned} x\theta_1\varphi_1\theta_2 &= b_2[a_1(x\theta_1 + a_2) + b_1] \\ &= b_2[x\theta_1 + a_1(x\theta_1 + a_2) + b_1] \\ &= b_2[(x\theta_1 + a_1)(x\theta_1 + a_2) + b_1]. \end{aligned}$$

还知在所得的这个表示式中元素 $a_1, a_2$ 的地位是对称的.

**引理 2** 若 $x \leqslant a_1$, 则

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1,$$

亦即对于含在 $a_1$ 中的元素映射 $\theta_1\varphi_1$ 和 $\theta_2\varphi_1$ 是可换的.

实际上,重复使用引理 1 以及可由性质 VII 推得之等式 $x\varphi_1$ 便有

$$\begin{aligned} x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 &= x\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 \\ &= x\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1 \end{aligned}$$

$$=x\varphi_1\theta_2\varphi_2\theta_1\varphi_1$$
$$=x\varphi_1\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1$$
$$=x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1.$$

元素 $n_{1j}^{(k)}(j=1,2)$ 和 $n_1^{(k)}, k=1,2,\cdots$ 考察(1)中第一个分解的直被加项 $a_1$. 令 $n_{11}^{(k)}, k=1,2,\cdots$, 是含于 $a_1$ 内的所有具性质 $x(\theta_2\varphi_1)^k=0$ 的元素 $x$ 的和, 此处 $(\theta_2\varphi_1)^k$ 表示映射 $\theta_2\varphi_1$ 的 $k$ 次幂. 类似地, 用 $n_{12}^{(k)}$, $k=1,2,\cdots$, 表示所有这样的元素 $x$ 的和, 其中 $x=a_1$ 且 $x(\theta_1\varphi_1)^k=0$. 由于 XI 有

$$n_{11}^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k=0, \qquad n_{12}^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^k=0 \tag{2}$$

显然有

$$n'_{1j}\leqslant n''_{1j}\leqslant\cdots\leqslant n_{1j}^{(k)}\leqslant\cdots,\quad j=1,2. \tag{3}$$

其次, 设 $n_1^{(k)}$ 是所有这样的元素 $x$ 的和, 其中 $x\leqslant a_1$ 且 $x(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k=0$. 仍有

$$n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k=0 \tag{4}$$

$$n'_1\leqslant n''_1\leqslant\cdots\leqslant n_1^{(k)}\leqslant\cdots \tag{5}$$

**引理 3** $n_{1j}^{(k)}\leqslant n_1^{(k)}$, $j=1,2, k=1,2\cdots$

例如看 $j=1$ 的情形. 应用引理 2 和(2)中第一个等式, 得

$$n_{11}^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k=n_{11}^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k(\theta_1\varphi_1)^k=0(\theta_1\varphi_1)^k=0,$$

即 $n_{11}^{(k)}\leqslant n_1^{(k)}$.

**引理 4** 若 $x\leqslant a_1$, 则当 $k=1,2,\cdots$ 时有不等式

$$x\leqslant x(\theta_1\varphi_1)^k+x(\theta_1\varphi_1)^{k-1}(\theta_2\varphi_1)+x(\theta_1\varphi_1)^{k-2}(\theta_2\varphi_1)^2$$
$$+\cdots+x(\theta_2\varphi_1)^k. \tag{6}$$

实际上, 由 X 有

$$x\leqslant x\theta_1+x\theta_2,$$

因而依 XI 有

$$x=x\varphi_1\leqslant(x\theta_1+x\theta_2)\varphi_1=x\theta_1\varphi_1+x\theta_2\varphi_1,$$

即当 $k=1$ 时证明了不等式(6). 若它对给定的 $k$ 已证明了, 则对

$k+1$ 情形的证明可这样来进行：把关系式(6)右侧中的每一被加项换成它在映射 $\theta_1\varphi_1$ 和 $\theta_2\varphi_1$ 下的象的和，如已证过的，这样作只能加强该不等式，然后用一下引理 2 再把同类项合并在一块。

**引理 5** $n_1^{(k)}\leqslant n_{11}^{(k)}+n_{12}^{(k)},\ k=1, 2, \cdots$.

**依引理 4**

$$n_1'\leqslant n_1'\theta_1\varphi_1+n_1'\theta_2\varphi_1.$$

但是由(4)和引理 2 得

$$(n_1'\theta_1\varphi_1)\theta_2\varphi_1=0,\ (n_1'\theta_2\varphi_1)\theta_1\varphi_1=0,$$

即

$$n_1'\theta_1\varphi_1\leqslant n_{11}',\ n_1'\theta_2\varphi_1\leqslant n_{12}'.$$

这样，引理对 $k=1$ 已证．设它对 $k-1$ 已证．应用引理 4 而用元素$n_1^{(k)}$代替原来的 $x$．由(4)得

$$[n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^k](\theta_2\varphi_1)^k=0,$$

即 $n_1^{(k)}(\theta_1\varphi_1)^k\leqslant n_{11}^{(k)}$以及同样地 $n_1^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k\leqslant n_{12}^{(k)}$．至于不等式(6)右侧中其余各被加项，则所有它们在映射$(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k-1}$下已变成零元了，即是都包含在$n_1^{(k-1)}$中，因而依归纳假设，都包含在$n_{11}^{(k-1)}+n_{12}^{(k-1)}$中，再由(3)就都在 $n_{11}^{(k)}+n_{12}^{(k)}$中了．

**引理 6** $n_{11}^{(k)}\cdot n_{12}^{(l)}=0,\ k,\ l=1, 2, \cdots$

设

$$x\leqslant n_{11}^{(k)}\cdot n_{12}^{(l)},$$

即

$$x(\theta_2\varphi_1)^k=x(\theta_1\varphi_1)^l=0.$$

若 $k=l=1$，则由 $x\leqslant x\theta_1\varphi_1+x\theta_2\varphi_1$ 和 $x\theta_1\varphi_1=x\theta_2\varphi_1=0$，得 $x=0$．下面对和数 $k+l$ 作归纳法来证明．若例如 $k>1$，则由

$$x(\theta_2\varphi_1)(\theta_2\varphi_1)^{k-1}=0$$

和

$$x(\theta_2\varphi_1)(\theta_1\varphi_1)^l=x(\theta_1\varphi_1)^l(\theta_2\varphi_1)=0$$

得 $x(\theta_2\varphi_1)=0$, 而由此及 $x(\theta_1\varphi_1)^l=0$并注意到 $1+l<k+l$ 得 $x=0$.

由引理3, 5和6 得

**引理 7** $n_1^{(k)}=n_{11}^{(k)}+n_{12}^{(k)}, k=1, 2\cdots$

对于直被加项 $a_1$ 我们引进了元素 $n_{11}^{(k)}, n_{12}^{(k)}$和$n_1^{(k)}$, 同样地, 对于直被加项 $a_2$ 相应引进的元素记作 $n_{21}^{(k)}, n_{22}^{(k)}, n_2^{(k)}$, 而对于(1)中第二个分解的直被加项 $b_j$, $j=1, 2$——记作 $m_{j1}^{(k)}, m_{j2}^{(k)}$, $m_j^{(k)}$. 对所有这些元素与上面证过的引理相类似的引理都是成立的.

**引理 8** $n_1^{(k)}+n_2^{(k)}=m_1^{(k)}+m_2^{(k)}, k=1, 2, \cdots$

实际上, 反复应用引理 1 以及利用等式 $m_1^{(k)}(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k=0$. 得

$$\begin{aligned}(m_1^{(k)}\varphi_1)(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k &= (m_1^{(k)}\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1)^k\\ &=(m_1^{(k)}\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^k\\ &=m_1^{(k)}(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k\varphi_1\\ &=0.\end{aligned}$$

这就证明了, $m_1^{(k)}\varphi_1\leqslant n_1^{(k)}$, 因为 $m_1^{(k)}\varphi_1\leqslant a_1$. 类似地有 $m_1^{(k)}\varphi_2\leqslant n_2^{(k)}$. 由此以及由 $m_1^{(k)}\leqslant m_1^{(k)}\varphi_1+m_1^{(k)}\varphi_2$ 得不等式

$$m_1^{(k)}\leqslant n_1^{(k)}+n_2^{(k)}.$$

用 $m_2^{(k)}$代替 $m_1^{(k)}$这样的不等式也成立. 另一方面, 由于对称性也有

$$n_i^{(k)}\leqslant m_1^{(k)}+m_2^{(k)}, i=1, 2.$$

**引理 9** $n_{11}^{(k)}\theta_1\leqslant m_{11}^{(k)}, k=1, 2, \cdots$

实际上, 利用 VII, 引理 1 和等式(2)有

$$\begin{aligned}n_{11}^{(k)}\theta_1(\varphi_2\theta_1)^k &= n_{11}^{(k)}\varphi_1\theta_1(\varphi_2\theta_1)^k=n_{11}^{(k)}\varphi_1\theta_2(\varphi_2\theta_1)^k\\ &=\cdots=n_{11}^{(k)}\varphi_1(\theta_2\varphi_1)^k\theta_1=n_{11}^{(k)}(\theta_2\varphi_1)^k\theta_1\\ &=0,\end{aligned}$$

又因为 $n_{11}^{(k)}\theta_1\leqslant b_1$, 故 $n_{11}^{(k)}\theta_1\leqslant m_{11}^{(k)}$.

**引理 10** $n_{11}^{(k)}(m_{12}^{(k)}+m_2^{(k)})=0, k=1, 2, \cdots$

把要证的等式左侧记作 $x$. 这时依引理 9,

$$x\theta_1 \leqslant n_{11}^{(k)}\theta_1 \leqslant m_{11}^{(k)}.$$

另一方面,依 XI 和 VII 有

$$x\theta_1 \leqslant (m_{12}^{(k)}+m_2^{(k)})\theta_1 = m_{12}^{(k)}\theta_1 = m_{12}^{(k)},$$

因为 $m_2^{(k)}\theta_1 \leqslant b_2\theta_1=0$. 因此,注意到引理 6 便有

$$x\theta_1 \leqslant m_{11}^{(k)} \cdot m_{12}^{(k)}=0.$$

由之 $x\theta_1\varphi_1=0$, 又因为 $x\leqslant n_{11}^{(k)} \leqslant a_1$, 故 $x \leqslant n'_{12}$. 这样由引理 6 有

$$x \leqslant n_{11}^{(k)} \cdot n'_{12}=0.$$

**引理 11** $m_{11}^{(k)} \leqslant n_{11}^{(k)}+m_{22}^{(k)}, k=1, 2, \cdots$

首先设 $k=1$. 因为 $m'_{11}\varphi_2\theta_1=0$, 故依 VIII, $m'_{11}\varphi_2 \leqslant b_2$, 因而由

$$(m'_{11}\varphi_2)(\varphi_1\theta_2)=m'_{11}(\varphi_2\varphi_1)\theta_2=0$$

(参看 IX)有不等式

$$m'_{11}\varphi_2 \leqslant m'_{22}.$$

另一方面, 依引理 9, 但把(1)中第一个分解和第二个分解的位置对调, 有

$$m'_{11}\varphi_1 \leqslant n'_{11}.$$

因此

$$m'_{11} \leqslant m'_{11}\varphi_1+m'_{11}\varphi_2 \leqslant n'_{11}+m'_{22}.$$

设已对 $k-1$ 证明了我们的结论. 我们知道

$$m_{11}^{(k)} \leqslant m_{11}^{(k)}\varphi_1+m_{11}^{(k)}\varphi_2,$$

并且依引理 9 还有 $\qquad m_{11}^{(k)}\varphi_1 \leqslant n_{11}^{(k)}.$

另一方面,

$$m_{11}^{(k)}\varphi_2 \leqslant m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1+m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_2.$$

因为 $m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1 \leqslant b_1$, 以及

$$(m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1)(\varphi_2\theta_1)^{k-1}=m_{11}^{(k)}(\varphi_2\theta_1)^k=0,$$

故

$$m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1 \leqslant m_{11}^{(k-1)},$$

因而由归纳假设有

$$m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_1 \leqslant n_{11}^{(k-1)} + m_{22}^{(k-1)} \leqslant n_{11}^{(k)} + m_{22}^{(k)}.$$

最后

$$m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_2 \leqslant b_2,$$

且依引理 1 有

$$\begin{aligned}(m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_2)(\varphi_1\theta_2)^k &= m_{11}^{(k)}(\varphi_2\theta_1)(\varphi_1\theta_2)^k \\ &= \cdots = m_{11}^{(k)}(\varphi_2\theta_1)^k(\varphi_1\theta_2) = 0,\end{aligned}$$

即有 $m_{11}^{(k)}\varphi_2\theta_2 \leqslant m_{22}^{(k)}$. 引理证完.

我们约定,格 $S$ 的元素 $c$ 具有主列, 如果位于 0 和 $c$ 之间的,亦即满足不等式

$$0 \leqslant x \leqslant c$$

的所有元素 $x$ 组成的子格 $S_c$ 具有主列. 如我们所知, 这等价于:在子格 $S_c$ 中元素的所有升和降链都是中断的.

现在我们作如下的假设,它一直到本节之末都保持有效.

($A$) 映射 $\varphi_i\theta_1\varphi_i\theta_2\varphi_i$, $i=1,2$ 和 $\theta_j\varphi_1\theta_j\varphi_2\theta_j$, $j=1,2$, 都把单位元映到具有主列的元素上.

引入记号

$$\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = \eta.$$

**引理 12** 元素 $1, 1\eta, 1\eta^2, \cdots, 1\eta^k, \cdots$ 组成递降叙列

$$1 \geqslant 1\eta \geqslant 1\eta^2 \geqslant \cdots \geqslant 1\eta^k \geqslant \cdots \tag{7}$$

存在有 $k_0$, 使得

$$1\eta^{k_0} = 1\eta^{k_0+1} = \cdots \tag{8}$$

若引入记号

$$\bar{a}_1 = 1\eta^{k_0}$$

则由 $x \leqslant \bar{a}_1$, $x\eta = 0$ 可得 $x = 0$.

实际上,(7)可由映射 $\eta$ 的单调性可得,而具有性质(8)的指数 $k_0$ 的存在由假设($A$)可得. 今证引理的第三个结论. 设 $0<x\leqslant\bar{a}_1$ 且 $x\eta=0$. 因为依(8)

$$\bar{a}_1\eta=\bar{a}_1,$$

故由 $0<x$ 有 $\bar{a}_1\neq 0$. 几次地应用性质 XIII 可知存在有元素 $y$, $y\leqslant\bar{a}_1$, 使得

$$y\eta=x.$$

因为依 XI 有

$$(x+y)\eta=x\eta+y\eta=y\eta=x$$

故可认定 $y>x$, 并且这个不等式是严格的. 这样继续下去我们在元素 $\bar{a}_1$ 中,因而在元素 $1\eta$ 中作出了无限递增元素叙列, 而这和假设($A$)是矛盾的.

**引理 13** $n_1^{(k_0)}=n_1^{(k_0+1)}=\cdots$

事实上,对任意自然数 $l$

$$n_1^{(k_0+l)}\eta^{k_0}\leqslant 1\eta^{k_0}=\bar{a}_1.$$

但是

$$n_1^{(k_0+l)}\eta^{k_0+l}=(n_1^{(k_0+l)}\eta^{k_0})\eta^l=0.$$

因此依前一个引理有

$$n_1^{(k_0+l)}\eta^{k_0}=0,$$

即 $n_1^{(k_0+l)}\leqslant n_1^{(k_0)}$. 由此以及(5)得引理的结论.

**引理 14** $n_{1j}^{(k_0)}=n_{1j}^{(k_0+1)}=\cdots, j=1, 2.$

这由(3),引理 7 和 13 以及性质 IV 即得.

把递增序列(5)和(3)的和顺序表为 $n_1$ 和 $n_{1j}$, $j=1, 2$. 关于元素 $a_2$ 的相应元素将记作 $n_2$ 和 $n_{2j}$, $j=1, 2$. 而关于元素 $b_i$, $i=1, 2$, 的相应元素记作 $m_i$ 和 $m_{ij}$, $j=1, 2$. 引理 13 和 14 使得我们可从引理 7 和 8 引出下面结果:

$$n_i=n_{i1}\dotplus n_{i2},\ m_i=m_{i1}\dotplus m_{i2},\ i=1, 2, \tag{9}$$

$$n_1+n_2=m_1+m_2 \tag{10}$$

用 $v$ 表示等于此最后一个等式之左侧和右侧的元素. 因为

$$n_1n_2\leqslant a_1a_2=0,$$

以及类似地

$$m_1m_2=0,$$

故对 $v$ 我们有两个直分解,

$$v=n_1\dotplus n_2=m_1\dotplus m_2 \tag{11}$$

应用(9), 我们得到这些直分解的两个接续:

$$v=n_{11}\dotplus n_{12}\dotplus n_{21}\dotplus n_{22}=m_{11}\dotplus m_{12}\dotplus m_{21}\dotplus m_{22} \tag{12}$$

下面我们来研究这些新的直分解.

**引理 15** *在直分解(12)中元素 $n_{11}$ 和 $m_{11}$, 还有 $n_{12}$ 和 $m_{21}$, $n_{21}$ 和 $m_{12}$, $n_{22}$ 和 $m_{22}$ 可以互相代替.*

事实上, 由于引理 13 和 14 从引理 10 和 11 可得等式

$$n_{11}(m_{12}+m_2)=0,$$

$$m_{11}\leqslant n_{11}+m_{22},$$

即由于(12)和(9)有

$$v=n_{11}\dotplus m_{12}\dotplus m_{21}\dotplus m_{22}.$$

因而, 在分解式(12)的右端, $n_{11}$ 代替了 $m_{11}$. 按照对称的理由, 有下面的直分解:

$$v=m_{11}\dotplus n_{12}\dotplus n_{21}\dotplus n_{22}.$$

其次, 容易验证, 元素 $n_{12}$ 和 $m_{21}$ 也具有和 $n_{11}$ 和 $m_{11}$ 间同样的相互关系. 这样也就证明了引理的所有结论.

**引理 16** *$n_1\bar{a}_1=0$.*

因为依引理 13, $n_1=n_1^{(k_0)}$, 故

$$(n_1\bar{a}_1)\eta^{k_0}=0.$$

由此以及引理 12 的最后一个结论便得本引理.

**引理 17** *$\bar{a}_1(m_1+b_2)=0$, 还有 $\bar{a}_1(m_2+b_1)=0$*

实际上，我们引入记号

$$\bar{a}_1(m_1+b_2)=x.$$

依引理 13 有 $k_0$，使得 $m_1=m_1^{(k_0)}$. 此时

$$x(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1}\leqslant(m_1^{(k_0)}+b_2)(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1}$$
$$=m_1^{(k_0)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1}+b_2(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1}.$$

右侧第二项等于 0，因为 $b_2\theta_1=0$. 另一方面，利用引理 1，等式

$$m_1^{(k_0)}\theta_1=m_1^{(k_0)}$$

以及元素 $m_1^{(k_0)}$的定义有

$$m_1^{(k_0)}(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1}=m_1^{(k_0)}(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^{k_0+1}$$
$$=m_1^{(k_0)}(\varphi_2\theta_1\varphi_1\theta_1)^{k_0}\varphi_2\theta_1\varphi_1=0.$$

因此 $x(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1}=0$， 又因为 $x\leqslant a_1$，故 $x\leqslant n_1$. 另一方面，我们知道 $x\leqslant\bar{a}_1$. 因此，由前一个引理有

$$x\leqslant n_1\bar{a}_1=0.$$

因为

$$a_1(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^{k_0+1}=a_1(\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1)^{k_0+1},$$

故引理的第二个结论可用同样的方法证明.

最后，我们再作两个假设:

(*B*) 设

$$a_i=n_i+\bar{a}_i,\ i=1,2,$$
$$b_j=m_j+\bar{b}_j,\ j=1,2,$$

(*C*) 设

$$\bar{b}_1\leqslant\bar{a}_i+b_2,\ \bar{b}_2\leqslant\bar{a}_i+b_1,\ i=1,2,$$
$$\bar{a}_1\leqslant\bar{b}_j+a_2,\ \bar{a}_2\leqslant\bar{b}_j+a_1,\ j=1,2.$$

假设(*B*)和引理 16，以及对直分解(1)的其他各被加项的相应引理引出下列的直分解:

$$a_i=n_i\dotplus\bar{a}_i,\ i=1,2,$$
$$b_j=m_j\dotplus\bar{b}_j,\ j=1,2.$$

由之以及由等式(9)我们得到对原给直分解(1)的下面这些接续:

$$1=n_{11}\dotplus n_{12}\dotplus \bar{a}_1\dotplus n_{21}\dotplus n_{22}\dotplus \bar{a}_2=m_{11}\dotplus m_{12}\dotplus \bar{b}_1 \dotplus m_{21}\dotplus m_{22}\dotplus \bar{b}_2. \tag{13}$$

**引理 18**　*直分解(13)的两组直被加项之间可以建立一个相互单值对应,使得相对应的被加项可以相互代替.*

对于在元素 $v$ 的直分解(12)中出现的被加项, 这个引理已在引理 15 中证过了,并且在我们这个一般情形下仍是有效的, 因为分解(13)是下面直分解的接续

$$1=v\dotplus \bar{a}_1\dotplus \bar{a}_2=v\dotplus \bar{b}_1\dotplus \bar{b}_2.$$

另一方面,假设($C$)和引理 17 说明, (13) 中第二个分解的直被加项$\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$的任意一个可以由第一个分解的被加项 $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ 的每一个来代替并且反之也对.

## §47. 基本定理

我们的目的是证明下面**定理**(Курош[16]).

*设带任意算子系的群$G$具有下面性质: 群$G$的容许中心的任意(容许)子群,若群$G$本身(或者,完全一样地,$G$关于换位子群的商群)可同态地映到其上,则它作为带算子的群具有主列. 这时对群$G$的任意两个直分解都存在有中心同构的接续.*

首先考察每一个直分解都恰有两个因子的情形. 在这种情形定理的结论可立刻由前一节中的引理 18 得出. 仅需证明,群$G$的正规子群格满足假设($A$), ($B$)和($C$).

这样,设给定分解

$$G=A_1\times A_2=B_1\times B_2. \tag{1}$$

这些分解的自同态顺序用 $\varphi_1, \varphi_2$ 和 $\theta_1, \theta_2$ 表之.

**假设($A$)** 如我们由 § 45 中知道的, 映射 $\theta_1\varphi_1\theta_2$ 是带算子的自同态, 把群$G$映入容许中心. 这对于映射 $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2$ 就更是对的

了. 另一方面，自同态 $\varphi_1$ 把中心的子群映到中心的子群上，这是因为中心之元素的分支也属于中心. 因此，$G\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$，还有 $G\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2$ 和 $G\theta_j\varphi_1\theta_j\varphi_2\theta_j$, $j=1, 2$, 都是中心的容许子群，因而 $(A)$ 由定理的已给条件得出.

**假设(*B*)** 我们下面将把 $n_1$ 和 $\bar{a}_1$ 改写作 $N_1$ 和 $\bar{A}_1$. 需要证明

$$A_1=\{N_1, \bar{A}_1\}.$$

若 $a_1$ 是 $A_1$ 中任意元素，则由引理 12,

$$a_1\eta^{k_0}\in\bar{A}_1.$$

但是 $\bar{A}_1\eta^{k_0}=\bar{A}_1$, 即在 $\bar{A}_1$ 中存在元素 $\bar{a}_1$, 使得

$$\bar{a}_1\eta^{k_0}=a_1\eta^{k_0}.$$

由之有

$$(\bar{a}_1^{-1}a_1)\eta^{k_0}=1,$$

即由引理 13 $\bar{a}_1^{-1}a_1\in N_1$, 因而 $a_1\in\{N_1, \bar{A}_1\}$.

**假设(*C*)** 将把 $\bar{b}_1$ 改写成 $\bar{B}_1$. 需要证明包含关系

$$\bar{B}_1\subseteq\{\bar{A}_1, B_2\}. \tag{2}$$

设 $x$ 是 $\bar{B}_1$ 中任意元素. 因为

$$\bar{B}_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)=\bar{B}_1,$$

故在 $\bar{B}_1$ 有元素 $y$, 使得

$$y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1=x.$$

另一方面，设 $k_0'$ 是一个数，它对 $\bar{B}_1$ 所起的作用就相当于数 $k_0$ 在引理 12 中对于 $\bar{A}_1$ 所起的作用；用 $k$ 表示这两个数中的最大者. 此时在 $B_1$ 中存在元素 $b_1$, 使得

$$b_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k=y. \tag{3}$$

依次把相应的元素通过它们在(1) 的第一和第二分解中的分支表示出来，便有

$$y\varphi_1=y\varphi_1\theta_1\cdot y\varphi_1\theta_2=y\varphi_1\theta_1\varphi_1\cdot y\varphi_1\theta_1\varphi_2\cdot y\varphi_1\theta_2$$

$$=y\varphi_1\theta_1\varphi_1\cdot y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1\cdot y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\cdot y\varphi_1\theta_2.$$

由之得

$$x=y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1=(y\varphi_1\theta_1\varphi_1)^{-1}\cdot y\varphi_1\cdot(y\varphi_1\theta_2)^{-1}(y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2)^{-1}. \quad (4)$$

最后等式右侧的最后两个因子显然属于 $B_2$. 今证，属于 $A_1$ 的前面两个因子包含在 $\bar{A}_1$ 中. 为此要把前一节中引理 1 和 2 弄得精确一些，因为我们要把它们用到群的元素上，而不是它的子群上.

**引理 1′** *对任意元素 $x\in G$,*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2=x^{-1}\theta_1\varphi_2\theta_2.$$

*由上式中交换 $\theta_1$ 和 $\theta_2$，以及 $\theta$ 和 $\varphi$ 的地位而得到的等式也都是成立的.*

实际上，因为

$$x\theta_1=x\theta_1\varphi_1\cdot x\theta_1\varphi_2,$$

故

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2\cdot x\theta_1\varphi_2\theta_2=(x\theta_1\varphi_1\cdot x\theta_1\varphi_2)\theta_2=x\theta_1\theta_2=1.$$

**引理 2′** *若元素 $x$ 含在子群 $A_1$ 中，则*

$$x\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1=x\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1.$$

它的证明和对引理 2 的一样，此时应当注意，在证明过程中将不得不四次使用引理 1′.

我们现在回到等式(4). 利用(3)和引理 1′ 和 2′，可得

$$\begin{aligned} y\varphi_1&=b_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k\varphi_1=(b_1\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^k\\ &=(b_1\varphi_1)(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k\in\bar{A}_1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\varphi_1\theta_1\varphi_1&=b_1(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^k\varphi_1\theta_1\varphi_1=(b_1\varphi_1)(\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1)^k\theta_1\varphi_1\\ &=(b_1\varphi_1)(\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^k\theta_1\varphi_1\\ &=(b_1\varphi_1\theta_1\varphi_1)(\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_1)^k\in\bar{A}_1.\end{aligned}$$

这就证明了包含关系(2). 假设($C$)的其他结论可相应地证明.

现在来考察群$G$的两个具有任意有限多个因子的直分解:

$$G=A_1\times A_2\times\cdots\times A_k=B_1\times B_2\times\cdots\times B_l, \tag{5}$$

并对和$k+l$作归纳法来证明对分解(5)存在有如下的中心同构接续:每一$A_i$, $i=1,2,\cdots,k$分解成$l$个因子的乘积,每一$B_j$, $j=1,2,\cdots,l$分解成$k$个因子的乘积(然而,其中的某些可能等于$E$),并且可建立这些因子之间的一个中心同构对应,使得出现在任一$A_i$的分解中的两个因子不会和同一个$B_j$之分解中的因子去对应.

这个结论当$k+l=4$时是对的,因为当$k=1$, $l=3$及$k=3$, $l=1$时这是显然的,而当$k=l=2$时由上面证过的得出.实际上,在我们这个情形,只要在前一节的分解式(13)中,例如,将$\bar{A}_1$和$N_{11}$, $\bar{A}_2$和$N_{22}$, $\bar{B}_1$和$M_{11}$以及$\bar{B}_2$和$M_{22}$合并在一起,这样(13)就变成(1)的中心同构的接续,且满足上面提出的条件.

设$k+l>4$,并设对于任意满足定理条件的群,以及对于它的所有其直因子总数小于$k+l$的直分解对,我们的结论已经证明.若,例如$k>2$,则引入记号

$$A_{k-1}^*=A_{k-1}\times A_k. \tag{6}$$

此时直分解

$$G=A_1\times A_2\times\cdots\times A_{k-1}^*=B_1\times B_2\times\cdots\times B_l$$

依归纳假设具有中心同构的接续:

$$\begin{aligned}G=&(A_{11}\times\cdots\times A_{1l})\times(A_{21}\times\cdots\times A_{2l})\times\cdots\\&\times(A_{k-1,1}^*\times\cdots\times A_{k-1,l}^*)\\=&(B_{11}\times\cdots\times B_{1,k-1})\times(B_{21}\times\cdots\times B_{2,k-1})\times\cdots\\&\times(B_{l1}\times\cdots\times B_{l,k-1}).\end{aligned}$$

因为群$A_{k-1}^*$作为群$G$的直因子也满足我们定理的条件且$2+l<k+l$,故群$A_{k-1}^*$的两个直分解,即指(6)和

$$A_{k-1}^*=A_{k-1,1}^*\times\cdots\times A_{k-1,l}^*,$$

具有中心同构接续

$$A_{k-1}^{*}=(A_{k-1,1}\times\cdots\times A_{k-1,l})\times(A_{k1}\times\cdots\times A_{kl})$$
$$=(A_{k-1,1,1}^{*}\times A_{k-1,1,2}^{*})\times\cdots\times(A_{k-1,l,1}^{*}\times A_{k-1,l,2}^{*}).$$

若 $A_{k-1,j}^{*}\simeq B_{j,k-1}$, $j=1,2,\cdots,l$ 且若这个中心同构把直分解

$$A_{k-1,j}^{*}=A_{k-1,j,1}^{*}\times A_{k-1,j,2}^{*}$$

对应于直分解

$$B_{j,k-1}=B_{j,k-1,1}\times B_{j,k-1,2},$$

则显然直分解

$$\begin{aligned}G&=(A_{11}\times\cdots\times A_{1l})\times(A_{21}\times\cdots\times A_{2l})\times\cdots\\&\quad\cdots\times(A_{k-1,1}\times\cdots\times A_{k-1,l})\times(A_{k1}\times\cdots\times A_{kl})\\&=(B_{11}\times\cdots\times B_{1,k-1,1}\times B_{1,k-1,2})\\&\quad\times(B_{21}\times\cdots\times B_{2,k-1,1}\times B_{2,k-1,2})\times\cdots\\&\quad\times(B_{l1}\times\cdots\times B_{l,k-1,1}\times B_{l,k-1,2})\end{aligned}$$

它就是所要求的分解(5)的中心同构接续.

为了结束定理的证明,我们剩下该考察的是,群 $G$ 的直分解具有无限多个因子的情形. 利用在 § 45 末引入的 $F$-群的概念,以及在那里所证的关于这些群的定理,我们先来证下面两个引理,在其中的第一个中不要求群 $G$ 满足基本定理叙述的那些条件.

**引理 19**(Головин[1]) *设给定具任意算子系的一个群 $G$ 的两个直分解,*

$$G=\dot{\prod_{\alpha}}A_{\alpha}\times\dot{\prod_{\gamma}}C_{\gamma}=\dot{\prod_{\beta}}B_{\beta}\times\dot{\prod_{\delta}}D_{\delta}\tag{7}$$

*若子群*

$$C=\dot{\prod_{\gamma}}C_{\gamma},\quad D=\dot{\prod_{\delta}}D_{\delta}$$

*是 $F$-子群且若直分解*

$$G=\dot{\prod_{\alpha}}A_{\alpha}\times C=\dot{\prod_{\beta}}B_{\beta}\times D\tag{8}$$

具有中心同构接续，则原给的直分解(7)也具有中心同构的接续.

事实上，依假设，直分解(8)有中心同构接续

$$G=\dot{\prod_{\alpha'}}A'_{\alpha'}\times\dot{\prod_{\varepsilon}}C'_{\varepsilon}=\dot{\prod_{\beta'}}B'_{\beta'}\times\dot{\prod_{\eta}}D'_{\eta} \tag{9}$$

其中

$$\dot{\prod_{\varepsilon}}C'_{\varepsilon}=C,\quad \dot{\prod_{\eta}}D'_{\eta}=D.$$

因为$C$是$F$-群，故依§45中证过的，它的直分解

$$C=\dot{\prod_{\gamma}}C_{\gamma}=\dot{\prod_{\varepsilon}}C'_{\varepsilon}$$

具有共同接续

$$C=\dot{\prod_{\sigma}}C''_{\sigma}.$$

把分解$\dot{\prod_{\varepsilon}}C'_{\varepsilon}$的这个接续代入(9)中第一个分解式，并相应地分解(9)的第二个分解式中与之中心同构的因子，便得群$G$的两个新的中心同构的分解:

$$G=\dot{\prod_{\alpha'}}A'_{\alpha'}\times\dot{\prod_{\sigma}}C''_{\sigma}=\dot{\prod_{\beta''}}B''_{\beta''}\times\dot{\prod_{\xi}}C''_{\xi}, \tag{10}$$

其中

$$\dot{\prod_{\xi}}D''_{\xi}=D.$$

$F$-群$D$的直分解

$$D=\dot{\prod_{\delta}}D_{\delta}=\dot{\prod_{\xi}}D''_{\xi}$$

具有共同接续. 用它代替(10)中第二个分解式的$\dot{\prod_{\xi}}D''_{\xi}$并相应地

分解在(10)中第一个分解式的与之中心同构的因子，我们便得到要求的给定直分解(7)的中心同构接续.

**引理 20** *若群 $G$ 满足基本定理的条件，则由此群的任意直分解可以去掉有限个直因子，使得所剩下的因子之积是 $F$-群.*

事实上，设给定群 $G$ 的一个任意的直分解. 今证，在此分解中只含有有限个具下面性质的因子：对其中每一个因子都有此分解中无限多个直因子，它们关于自己的换位子群的商群可以非平凡地同态地映入这个因子的容许中心内. 实际上，若不然的话，则就能指出可数个直因子，它们关于换位子群的商群可以被非平凡地映入不同的直因子的容许中心中. 但是这将引出存在整个群 $G$ 关于其换位子群的商群到 $G$ 的容许中心之一个子群上的同态对应且这个子群是可数多个子群的直积，因而它不能具有主列，然而这是和定理的假设相矛盾的.

在给定的直分解中去掉前段中所谈的那些直因子，而来证明，现在总起来只有有限个因子，它们关于换位子群的商群能被非平凡地映入随便一个(其余)因子的容许中心内. 事实上，如果这样的因子有无限多个，则注意到现在只有有限个上示类型的商群能够被非平凡地映入每一个剩下因子的容许中心中，我们又能指出可数个直因子，它们关于换位子群的商群可被非平凡地映入不同的直因子的容许中心中，而这又是和定理的假设矛盾. 若我们把这些因子(共有限个)也去掉，则易见剩下因子的乘积便是一个 $F$-群了.

引理 19 和 20 把基本定理的一般情形归结为上面讨论过的具有限个直因子之分解的情形. 这样就结束了定理的证明.

*如果群 $G$ 的容许中心或者是它关于换位子群的商群本身具有主列，则基本定理的条件显然是被满足的.* 由此便已可推得

Шмидт **定理.** *若带任意算子系的群具有主列，则此群的任意*

两个具不可分解因子的直分解中心同构.

## §47a. Шмидт 定理的直接证明. 一些其他定理

由于 Шмидт 定理的重要性，我们来给出它的一个直接证明，只是在次要的一些细节上和 Шмидт[4]中的证明稍异. 在进行证明时，本质上利用了任意算子域的存在性以及由之而得到的可以局限于只考虑关于此算子域容许的子群. 进行这个证明而不利用算子，则将要求以更强的假设来代替关于主列存在的假设，即假设在群中存在合成列.

首先指出，为了证明定理只需证明，两个任意具不可分解因子的分解，其中一个的任一个直因子可以替换另一个分解的某个直因子，因为这时替换一组直因子就可以通过依次替换单个的因子来实现，而为了证明定理，只要取第一个分解中的所有因子作为应替换的因子集就行了. 我们将用归纳法来证，假设对于其主列之长度较群 $G$ 的为小的群，我们的结论已被证明. 实际上，主列之长度等于 1 的群是单群(关于给定的算子域)因而是不可分解的，即对于它们而言定理是显然成立的.

其次，我们作这样假定：把群 $G$ 的所有内自同构并到算子域上去. 由于这个假定，现在群 $G$ 的容许群仅是在原来算子域容许的正规子群——这件事在下面应用时将不作特别声明. 同时我们这样改变算子域对群 $G$ 的直分解没有任何影响，因为群的直因子是它的正规子群；因而，从我们的目的来看这个改变是完全合法的.

在我们这样选择算子域下主列的概念就与合成列的概念是一致的，这就使我们有可能使用 §16 中对于合成列得到的结果. 这样，群 $G$ 的容许真子群，当看作带有和 $G$ 相同的算子域的群时，具有主列，其长度较 $G$ 的小，亦即对于它们，我们的定理已经证明. 其次指出，若容许子群 $A$ 和 $B$ 合在一起生成整个群 $G$，若 $D=A\cap B$

并把群 $G, A, B$ 和 $D$ 的主列之长度顺序表作 $l, l_1, l_2$ 和 $l'$, 则

$$l = l_1 + l_2 - l'. \tag{1}$$

实际上, 若 $\bar{l}_1$ 是群 $G/A$ 的主列之长度, 则如 § 16 中所示, $l = l_1 + \bar{l}_1$; 但依同构定理 $G/A \simeq B/D$, 由之得 $\bar{l}_1 = l_2 - l'$. 特别, 若 $G = A \times B$, 即若 $D = E$, 则

$$l = l_1 + l_2. \tag{2}$$

有了这些准备之后现在转来进行证明. 设

$$G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_s \tag{3}$$

是群 $G$ 的两个具不可分解因子的直分解, 并设必须替换因子 $H_1$. 用 $F_{i1}$ 表示子群 $H_1$ 在第二个分解的直因子 $F_i$ 中的分支. 先假设至少有一个 $i$ 使子群 $F_{i1}$ 异于 $F_i$. 此时子群

$$\bar{G} = F_{11} \times F_{21} \times \cdots \times F_{s1} \tag{4}$$

异于群 $G$. 因为 $H_1 \subseteq \bar{G}$, 故依 § 17 中的 VII′ 有

$$\bar{G} = H_1 \times D, \tag{5}$$

其中 $D = \bar{G} \cap (H_2 \times \cdots \times H_k)$. 对于 $\bar{G}$, 依归纳假设, 定理已证, 即当把(4)继续分解成不可分解因子之直积时必有一个直因子, 例如含在 $F_{11}$ 中——把它记作 $F'_{11}$——它可以在分解(5) 中替换因子 $H_1$, 即

$$\bar{G} = F'_{11} \times D.$$

由之 $F'_{11} \cap D = F'_{11} \cap \bar{G} \cap (H_2 \times \cdots \times H_k) = E$, 或者, 因为 $F'_{11} \subseteq \bar{G}$, $F'_{11} \cap (H_2 \times \cdots \times H_k) = E$, 这也就是子群 $F'_{11}$ 和 $H_2 \times \cdots \times H_k$ 组成直积. 由 $F'_{11}$ 和 $H_1$ 之间的同构对应以及(2)得到, 这个直积的主列的长度和 $G$ 一样, 因而它与 $G$ 重合,

$$G = F'_{11} \times H_2 \times \cdots \times H_k.$$

由 $F'_{11} \subseteq F_1$ 以及 VII′(§ 17)并注意到群 $F_1$ 的不可分解性, 得等式 $F'_{11} = F_1$, 即

$$G = F_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k.$$

这就证明了，$H_1$ 和 $F_1$ 中心同构且 $H_1$ 可由 $F_1$ 替换. 今证，从自己这方面子群 $H_1$ 可在(3)的第二个分解中替换 $F_1$. 实际上，由

$$F'_{11}\subseteq F_{11}\subseteq F_1 \text{ 和 } F'_{11}=F_1 \text{ 得 } F_{11}=F_1,$$

即子群 $H_1$ 在 $F_1$ 中的分支与 $F_1$ 相等. 由之得子群 $H_1$ 和 $F_2\times\cdots\times F_s$ 的乘积，它显然包含 $H_1$ 的所有元素在 $F_1$ 中的分支，也包含整个子群 $F_1$ 因而与 $G$ 重合，而由 $H_1$ 和 $F_1$ 之间同构对应以及等式(1)得

$$H_1\cap(F_2\times\cdots\times F_s)=E,$$

即

$$G=H_1\times F_2\times\cdots\times F_s.$$

今设 $H_1$ 在所有 $F_i$ 中的分支都等于 $F_i$ 本身，并设 $F_i$ 中的一个，例如 $F_1$，在 $H_1$ 内的分支等于 $H_1$. 因为在这些假设下，子群 $F_1$ 包含在子群 $H_1$ 和 $F_2\times\cdots\times F_s$ 的乘积中，而子群 $H_1$ 包含在子群 $F_1$ 和 $H_2\times\cdots\times H_k$ 的乘积中，故有

$$\left.\begin{array}{l}H_1(F_2\times\cdots\times F_s)=G,\\ F_1(H_2\times\cdots\times H_k)=G.\end{array}\right\}\tag{6}$$

今证这些积是直积. 若把群 $G, H_1, H_2\times\cdots\times H_k, F_1$ 和 $F_2\times\cdots\times F_s$ 的主列之长顺序记作 $l, l_1, \bar{l}_1, l_2$ 和 $\bar{l}_2$，则由于(1)(2)和(6)有

$$l=l_1+\bar{l}_1=l_2+\bar{l}_2,\ l\leqslant l_1+\bar{l}_2,\ l\leqslant l_2+\bar{l}_1.$$

由之得 $l_1=l_2, \bar{l}_1=\bar{l}_2$，因而

$$H_1\cap(F_2\times\cdots\times F_s)=F_1\cap(H_2\times\cdots\times H_k)=E,$$

从而

$$G=H_1\times F_2\times\cdots\times F_s=F_1\times H_2\times\cdots\times H_k.$$

最后，设子群 $H_1$ 在所有 $F_i$ 中的分支仍和 $F_i$ 本身重合，但所有 $F_i$ 在 $H_1$ 中的分支异于 $H_1$. 组成(3)的第二个分解的所有直因子这时所处的条件，就和上面讨论过的第一种情形中因子 $H_1$ 所处的条件完全一样. 因此我们可用第一个分解中某些因子来替换

第二个分解中的因子 $F_i$. 在顺序完成这些替换时我们必定用到第一分解中不同的因子，其中也会用到因子 $H_1$，因为在用完第一分解中所有因子之前不可能先顶替完第二个分解中的所有因子．若在这个顺序替换中子群 $H_1$ 将替换某个因子 $F_j$，则如考察第一情况时证明过的，子群 $F_j$ 在 $H_1$ 中的分支应当和 $H_1$ 相等．从而得到，这最后一种情况根本就是不可能的．

我们得到，(3)的第一个分解中的直因子 $H_1$ 在所有可能情况都可由(3)的第二分解中某个直因子去替换而它和 $H_1$ 是中心同构的．这就结束了 Remak-Шмидт 定理的证明．

在研究群的直分解之中心同构接续存在性的问题时还有另外一个可能的途径：对群本身不作任何假设，但只研究此群某些具有一些特性的直分解．作为例子我们来证明下面的定理（Головин [1]）．

任意群的两个直分解，若在其每一个中群的中心完全含于某一个直因子内，则永远有中心同构的接续(参看补充 5. 5.)

先考察有两个因子的分解的情形．设

$$G=C\times A=Z\times X \tag{7}$$

是群 $G$ 的两个直分解，并且因子 $C$ 和 $Z$ 包含群 $G$ 的整个中心．若 $A_Z$ 和 $A_X$ 是 $Z$ 和 $X$ 在 $A$ 中的分支，$X_C$ 和 $X_A$ 是 $C$ 和 $A$ 在 $X$ 中的分支，则由在因子 $A$ 和 $X$ 中没有中心，可得存在有分解

$$A=A_Z\times A_X,\quad X=X_C\times X_A,$$

从而

$$G=C\times A_Z\times A_X=Z\times X_C\times X_A. \tag{8}$$

由 $C\times A_X\supseteq X$ 得

$$C\times A_X=X\times D,$$

其中 $D=(C\times A_X)\cap Z=C\cap Z$，因为 $A_X\cap A_Z=E$．由之以及由(7)和(8)得

$$G = X \times Z = X \times D \times A_Z,$$

因此 $Z$ 和 $D \times A_Z$ 中心同构, 又因为群 $G$ 的中心含在 $Z$ 中, 故 $Z = D \times A_Z$. 相应地有 $C = D \times X_C$. 把它带入分解式(8), 我们得到

$$G = D \times X_C \times A_Z \times A_X = D \times A_Z \times X_C \times X_A,$$

这就得到给定分解(7)的两个接续, 它们彼此只差一个因子因而是中心同构的.

利用前节中的引理 19, 一般的情形可归结为上面刚讨论过的具两个因子分解的情形.

特别, 由证过的这个定理可得, *具不可分解中心之群的两个任意直分解有中心同构接续*(参看补充 5.5.)

类似的处理方式在关于共同接续的存在问题中也是可能的. 先引进涉及任意群的自同态和自同构的一些定义.

群 $G$ 的自同态 $\chi$ 和 $\eta$ 叫作*可加的*, 如果在这些自同态下群 $G$ 的象, 子群 $G\chi$ 和 $G\eta$ 之一的任意元素与其他一个的任意元素是可交换的. 把群 $G$ 的任意元素 $a$ 映到元素 $a\chi \cdot a\eta$ 的映射在可加自同态的情况下称之为 $\chi$ 和 $\eta$ 的*和*,

$$a(\chi + \eta) = a\chi \cdot a\eta.$$

这个映射也是群 $G$ 的自同态, 因为

$$(ab)(\chi + \eta) = (ab)\chi \cdot (ab)\eta = a\chi \cdot b\chi \cdot a\eta \cdot b\eta$$
$$= a\chi \cdot a\eta \cdot b\chi \cdot b\eta = a(\chi + \eta) \cdot b(\chi + \eta).$$

阿贝尔群的自同态永远是可加的(参看 §21), 因而自同态的和是永远可定义的. 在一般情形下, 自同态 $\chi$ 和群 $G$ 的所有自同态都是可加的, 当且仅当子群 $G\chi$ 属于群 $G$ 的中心. 零自同态 $\omega$ 是一个可和群的任意自同态都可加的自同态. 显然它在自同态的加法中起零元的作用.

群的两个自同构是彼此可加的, 仅当它是阿贝尔群时才是可能的, 并且这些自同构的和不一定是自同构.

由可加性的定义可得任意群自同态的加法是交换的. 如果自同态 $\chi_1, \chi_2$ 和 $\chi_3$ 两两可加, 则其中任意一个和其余两个的和也是可加的, 并且由于群中运算的结合性知自同态的加法也是结合的. 这样, 我们仅当一些自同态为两两可加时才谈论它们的和.

自同态的和与积之间有分配律: 若给定群 $G$ 的可加自同态 $\chi_1$ 和 $\chi_2$ 以及一个自同态 $\eta$, 则 $\chi_1\eta$ 和 $\chi_2\eta$(以及 $\eta\chi_1$ 和 $\eta\chi_2$)也是彼此可加的且有下面等式

$$(\chi_1+\chi_2)\eta=\chi_1\eta+\chi_2\eta \tag{9}$$

$$\eta(\chi_1+\chi_2)=\eta\chi_1+\eta\chi_2 \tag{10}$$

实际上, 对于 $G$ 中任意 $a$ 和 $b$, 元素 $a\chi_1$ 和 $b\chi_2$ 是可换的, 因此元素 $(a\chi_1)\eta$ 和 $(b\chi_2)\eta$ 也是可换的, 这是因为在自同态对应下保持元素间的可换性质. 自同态 $\eta\chi_1$ 和 $\eta\chi_2$ 的可加性可直接由 $\chi_1$ 和 $\chi_2$ 的可加性得到. 这时对任意 $a\in G$ 有

$$\begin{aligned}a[(\chi_1+\chi_2)\eta]&=(a\chi_1\cdot a\chi_2)\eta=(a\chi_1)\eta\cdot(a\chi_2)\eta\\&=a(\chi_1\eta)\cdot a(\chi_2\eta)=a(\chi_1\eta+\chi_2\eta),\end{aligned}$$

这就证明了等式(9). 同样简单地可证明等式(10).

约定称自同态 $\chi$ 和 $\eta$ 是可换的, 如果 $\chi\eta=\eta\chi$. 这个概念使得能够划分出一个自同态类, 而此类在今后将起一种特殊的作用.

群 $G$ 的自同态 $\chi$ 叫作正规的, 如果它和此群的所有内自同构都是可换的, 亦即对 $G$ 中任意 $a$ 和 $b$, 有

$$(b^{-1}ab)\chi=b^{-1}(a\chi)b.$$

易见, 群的零自同态和恒等自同构都是正规自同态. 显然, 在阿贝尔群的情形任意自同态都是正规的.

两个正规自同态 $\chi$ 和 $\eta$ 之积, 如果它们还是可加的, 则还有其和, 仍是正规的. 这可由下等式中看出

$$(b^{-1}ab)\chi\eta=[b^{-1}(a\chi)b]\eta=b^{-1}(a\chi\eta)b,$$

$$(b^{-1}ab)(\chi+\eta)=(b^{-1}ab)\chi\cdot(b^{-1}ab)\eta$$

$$= b^{-1}(a\chi)b \cdot b^{-1}(a\eta)b$$
$$= b^{-1}(a\chi \cdot a\eta)b = b^{-1} \cdot a(\chi + \eta) \cdot b.$$

正规自同态把群 $G$ 的任意正规子群仍映到正规子群. 实际上, 若 $H$ 是 $G$ 中正规子群, 则对 $H$ 中任意 $h$ 和 $G$ 中任意 $a$

$$a^{-1}(h\chi)a = (a^{-1}ha)\chi \in H\chi.$$

这就证明了, 子群 $H\chi$ 是 $G$ 中的正规子群. 我们指出, 正规自同态的这个性质不能取作其定义.

在自同构的情形, 自同态的正规性定义就引出正规自同构的概念, 显然, 群 $G$ 的正规自同构组成群 $G$ 的内自同构群 $\Phi'$ 在它的所有自同构之群 $\Phi$ 中的中心化子. 因此, 由于 § 12 中关于 $\Phi'$ 在 $\Phi$ 中的正规性的定理以及 § 11 中关于正规子群的中心化子的定理得, 正规自同构组成群 $G$ 所有自同构的群中的一个正规子群.

正规自同构也可以用以下方式来刻划: 假若我们称群 $G$ 的一个自同构 $\varphi$ 是中心的, 当对 $G$ 中任意 $b$ 元素 $(b\varphi)b^{-1}$ 属于群 $G$ 的中心, 亦即元素 $b$ 及其象 $b\varphi$ 彼此只差一个属于中心的因子, 则正规自同构且仅有它们是中心的自同构.

实际上, 若自同构 $\varphi$ 是正规的, 则由

$$(b\varphi)^{-1}(a\varphi)(b\varphi) = (b^{-1}ab)\varphi = b^{-1}(a\varphi)b$$

可得等式

$$(a\varphi) \cdot (b\varphi \cdot b^{-1}) = (b\varphi \cdot b^{-1}) \cdot (a\varphi),$$

即是元素 $(b\varphi)b^{-1}$ 和所有元素 $a\varphi$ 是可换的, 这也就是它和群 $G$ 的所有元素都是可换的, 因为 $a\varphi$ 和 $a$ 一起历遍群的所有元素. 反之, 若自同构 $\varphi$ 是中心的, 则

$$(a\varphi) \cdot (b\varphi \cdot b^{-1}) = (b\varphi \cdot b^{-1}) \cdot (a\varphi),$$

由之有

$$(b^{-1}ab)\varphi = (b\varphi)^{-1}(a\varphi)(b\varphi) = b^{-1}(a\varphi)b.$$

从而可得, 无中心的群除去恒等自同构外没有其他的正规自

同构.

上面证过的自同构的正规性和中心性的一致性在任意自同态的情况下不再成立. 例如, 零自同态永远是正规的, 但如果把上面给出的中心自同构的定义移到自同态上来, 则它在一般情况下不是中心的.

**群的直分解的自同态(参看§45)永远是正规的.** 实际上, 若 $G=A\times B$, $g, g'\in G$, $g=ab$, $g'=a'b'$, 且若 $\varphi_A$ 是相应于直因子 $A$ 的自同态, 则

$$(g'^{-1}gg')\varphi_A=a'^{-1}aa'=g'^{-1}(g\varphi_A)g'.$$

我们将称满足条件 $\varphi^2=\varphi$ 的自同态 $\varphi$ 为**幂等自同态**; 换句话说, 就是这样一个自同态, 它将群的任意元素映到不动元上去. 显然, 零和单位自同态, 以及所有直分解的自同态都是幂等自同态.

**群 $G$ 不能分解成直积, 当且仅当零和单位自同态是它仅有的幂等正规自同态.**

事实上, 若在群 $G$ 中给定正规幂等自同态 $\varphi$ 且它异于零和单位自同态, 则用 $A$ 表示 $G$ 中一切满足 $a\varphi=a$ 的元素 $a$ 的集合, 而用 $B$ 表示一切满足 $b\varphi=1$ 的元素 $b$ 的集合. 这些集合都异于 $G$, 并且它们的交仅含 1. 其次, 这些集合都是子群, 由于自同态 $\varphi$ 的正规性, 它们还是群 $G$ 的正规子群. 最后, 若 $g$ 是 $G$ 中任意元素, 则

$$g=g\varphi(g^{-1}\varphi\cdot g),$$

又因为由于 $\varphi^2=\varphi$ 有 $g\varphi\in A$, $g^{-1}\varphi\cdot g\in B$, 故 $G=A\times B$.

我们现在来证下面定理(Fitting[3], Курош[5]).

**群 $G$ 的直分解**

$$G=\prod_{\alpha}A_\alpha \tag{A}$$

**和此群的任意其他直分解都具有共同接续, 当且仅当所有因子 $A_\alpha$ 关于群 $G$ 的正规自同构集是特征(容许)子群.**

先证此条件的充分性. 设 $A$ 是分解(A)的一个因子, 而 $B$ 是此分解中所有其余因子之积. 我们有分解

$$G = A \times B.$$

设 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 是对应此分解中的因子 $A$ 和 $B$ 的正规自同态. 若 $\eta$ 是群 $G$ 的任意一个正规自同态, 则 $\varphi_1\eta\varphi_2$ 仍是正规的, 并且它把群 $G$ 映入子群 $B$ 的中心, 也就是映入群 $G$ 的中心. 这是因为, 若 $g = ab$ 及 $b' \in B$, 则

$$b'^{-1}(g\varphi_1\eta\varphi_2)b' = (b'^{-1}gb')\varphi_1\eta\varphi_2 = (a\cdot b'^{-1}bb')\varphi_1\eta\varphi_2$$
$$= a\varphi_1\eta\varphi_2 = g\varphi_1\eta\varphi_2.$$

从而得(参看上面)自同态 $\varphi_1\eta\varphi_2$ 和恒等自同构是可加的, 并且它们的和 $\chi$ 也是正规的, 这里 $\chi$ 把任意元素 $g$ 映到元素

$$g\chi = g\varphi_1\eta\varphi_2\cdot g.$$

这里指出, 若 $g = ab$ 而 $a\eta = a'b'$, 则 $g\chi = a\cdot bb'$. 由之得自同态 $\chi$ 实际是自同构: 若 $g\chi = 1$, 则 $g \in B$, 但此时 $g\chi = g$, 即有 $g = 1$; 另一方面, $G$ 中任意元素 $g$, 如果 $g = ab$ 而 $a\eta = a'b'$, 则它是元素 $gb'^{-1}$ 在自同态 $\chi$ 下的象. 现在我们假设 $A\eta \not\subseteq A$, 即是存在 $a \in A$, 使得 $a\eta = a'b'$ 而 $b' \neq 1$. 这时

$$a\chi = ab',$$

即 $a\chi \notin A$. 这样, 我们证明了, 由分解(A)中所有直因子关于正规自同构集的特征性可得它们关于群 $G$ 的所有正规自同态的特征性.

现在设

$$G = \prod_\beta B_\beta$$

是群 $G$ 的任意一个直分解, 并设 $\psi_\beta$ 是对应此分解中的因子 $B_\beta$ 的自同态. 若 $A_\alpha \cap B_\beta = C_{\alpha\beta}$, 则显然子群 $C_{\alpha\beta}$ 组成直积. 今证, 在我们的假设下这个积等于群 $G$. 实际上, 若 $a$ 是某个子群 $A_\alpha$ 的一个任意元素且若

$$a = b_{\beta_1} b_{\beta_2} \cdots b_{\beta_k},$$

其中 $b_{\beta_i} \in B_{\beta_i}$, 则

$$b_{\beta_i} = a\psi_{\beta_i}.$$

因为自同态 $\psi_{\beta_i}$ 是正规的，则由于上面证过的知元素 $b_{\beta_i}$ 在 $A_\alpha$ 中，即在 $C_{\alpha\beta_i}$ 中．这就证明了，$A_\alpha$ 是它和所有子群 $B_\beta$ 之交的直积．

现转来证明条件的必要性．设分解$(A)$ 和群 $G$ 的任意其他直分解都有共同接续，并设 $\psi$ 是此群的一个任意正规自同构．若我们用 $\psi_\alpha$ 表示对应此分解中因子 $A_\alpha$ 的自同态，并令 $\beta \neq \alpha$, 则用和上面同样方法可以证明，由式子

$$g\chi = g\varphi_\alpha\psi\varphi_\beta \cdot g$$

定义的映射 $\chi$ 是群 $G$ 的正规自同构，并且当 $\gamma \neq \alpha$ 时有 $A_\gamma\chi = A_\gamma$. 自同构 $\chi$ 把分解$(A)$变成直分解

$$G = \prod_\gamma A_\gamma\chi = A_\alpha\chi \times \prod_{\gamma \neq \alpha} A_\gamma.$$

这个分解依假设和分解$(A)$ 有共同的接续，又因为 $A_\gamma \cap A_\alpha = E$, $\gamma \neq \alpha$, 故有 $A_\alpha\chi = A_\alpha$.

这时如果由子群 $A_\alpha$ 取一个元素 $a$, 则 $a\chi \in A_\alpha$, 即 $a\varphi_\alpha\psi\varphi_\beta \in A_\alpha$. 由之并注意到元素 $a\varphi_\alpha\psi\varphi_\beta$ 显然含在 $A_\beta$ 中，以及 $A_\alpha \cap A_\beta = E$ 便得

$$a\varphi_\alpha\psi\varphi_\beta = (a\psi)\varphi_\beta = 1.$$

换言之，元素 $a\psi$ 在任意直因子 $A_\beta$, $\beta \neq \alpha$, 中的分支都等于单位元，即是 $a\psi \in A_\alpha$. 这就证明了直因子 $A_\alpha$ 关于正规自同构集的特征性．

在 §45 中证明了对无中心的群之任意两个直分解必存在有共同的接续，这个事实是我们上述准则的直接推论，它可由上面证过的，恒等自同构是无中心的群之唯一的正规自同构这一定理得出．(参看补充 5.2.)

## § 47b. 具有同构子群格的群

任意一个群 $G$ 唯一地对应一个格 $S(G)$，它是由 $G$ 的所有子群组成的. 产生一个自然的问题；群 $G$ 是否由格 $S(G)$ 完全确定呢？即是由格 $S(G)$ 和 $S(G')$ 的（格的）同构是否可推出群 $G$ 和 $G'$ 的（群的）同构？易见，一般情况下回答是否定的. 例如，不同素数阶的所有循环群具有相同的子群格，虽然它们是不同构的. 尽管如此，借助其子群格来确定群本身的问题，如果对所考虑的群或者对所考虑的格同构加上一些补充的限制，仍然保留其意义. 在这个方向已作出的结果现在还不太多；基本结果可在 Baer[20] 中找到[1]，而下面仅叙述其中一部分.

在下面我们约定称群 $G$ 的子群格到随便一个群 $G'$ 的子群格上的任意格同构对应为群 $G$ 的格同构. 类似地我们把群 $G$ 和 $G'$ 间的格同构理解为格 $S(G)$ 和 $S(G')$ 之间的格同构.

要求保持指数是附加到格同构上的一个可能的限制. 这指的是：若给出群 $G$ 和 $G'$，则只考察这样一些格同构，使得如果 $A$ 和 $B$ 是 $G$ 的子群，并且 $A \subset B$，而 $A'$，$B'$ 是 $G'$ 中与之对应的子群，则 $A$ 在 $B$ 中的指数等于 $A'$ 在 $B'$ 中的指数. 这样去作，可以躲开上面提到的由不同素数阶循环群引起的困难. 虽然如此，保持指数的格同构仍可存在于不同构的群之间，甚至存在于阿贝尔群和非交换群之间. 作为例子，我们举出 16 阶的阿贝尔群，它是阶为 2 和 8 的循环群的直和，和 16 阶的非交换群，它由两个生成元 $a$ 和 $b$ 及定义关系式

$$a^8=1,\quad b^2=1,\quad ba=a^5b$$

给出. 验证工作留给读者.

其次，可以考察群 $G$ 和 $G'$ 之间的正规格同构，它把正规子群

---

1）在准备第三版时情况已根本地变化了.（参看补充 § 14）.

变到正规子群，或者更进一步考察完全正规格同构，这指的是：如果 $A, B, C$ 是群 $G$ 的子群，且 $A\subset C, B\subset C$，而 $A', B', C'$ 是 $G'$ 中与之对应的子群，则 $A$ 和 $B$ 在 $C$ 中共轭，当且仅当 $A'$ 和 $B'$ 在 $C'$ 中共轭．但是，应当指出(参看 Rottlaender[1])，*存在有不同构的，甚至还是有限的群，在其间可建立格同构，它既保持指数并且是完全正规的*．因此，上示的这些限制不会达到我们感兴趣的目的，在下面我们将不使用它们，而介绍读者去看 Baer[20]，其中包含一些与这些限制有联系的结果．

另一方面，研究在什么条件下两个群的格同构蕴含其群同构，可以在下面的前提下来进行：至少这两个群中的一个属于某个窄的或更窄一些的群类．现在只能在所考察的一个群是阿贝尔群时得到了相当深入的结果[1)]．我们由讨论循环群开始．在 § 44 中曾证明过，循环群和它们的升叙列之并是具分配子群格的仅有的群．而一个格是分配的这个性质在格同构下是保持不变的．因而，假若我们注意到，在循环群中任意异于 $E$ 的子群仅含在有限多个子群内，即是循环群不能格同构于群之真递增无限叙列的并，以及有限循环群的格是有限的而无限循环群的格是无限的，便可得到下面结果．

*无限循环群只能和无限循环群格同构，亦即此群由其子群格完全确定．若有限循环群 $G$ 格同构于群 $G'$，则 $G'$ 也是有限循环群，虽然可能具有不同的阶[2)]．*

现在暂不转到研究其他较广的群类，我们来作一个补充注记．若 $G$ 是任意一个群，而 $G'$ 是与之同构的群，则群 $G$ 和 $G'$ 间的任意一个群同构对应产生它们之间的一个格同构对应．然而在这些群

---

1) 如已指出过的，截止到准备第三版这段时间情况已根本地改变了．

2) 由此当然并不能得出任意两个有限循环群是彼此格同构的．事实上，容易验证，循环群 $G$，其阶为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同素数者，和有限循环群 $G'$ 格同构，当且仅当群 $G'$ 的阶是 $n'=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_k^{\alpha_k}$，其中，$q_1, q_2, \cdots, q_k$ 是不同的素数．

之间可能存在一些格同构对应，它们不是由任意的群同构对应产生的．例如，无限循环群只有两个群自同构对应，并且这两个产生相同的恒等格自同构对应；与此同时，对此群的子群格的研究（参看 § 44）说明，选取素数集到自身上的所有可能的一一对应，我们可得到这个子群格的不同的格自同构对应．易见，*在群 $G$ 和 $G'$ 之间所有产生一个给定的格同构的群同构之个数（若是这样的群同构真存在的话）等于群 $G$ 的所有产生该群的恒等格自同构的群自同构的个数*．利用这个，我们来证明下面引理．

*若 $G$ 是阿贝尔群，含有无限阶元素且若它的一个给定的格同构是由群同构产生的，则此格同构恰由两个群同构产生．*

实际上，群 $G$ 的恒等自同构和把任意元素对应到其逆元的自同构都产生此群的恒等格同构．另一方面，令 $f$ 是群 $G$ 的群自同构，它也产生恒等格自同构．若 $a$ 是 $G$ 中任意元素，则元素 $af$ 是循环群 $\{a\}$ 中的一个生成元，亦即 $af=a^{n(a)}$，其中 $n(a)=\pm1$，假若 $a$ 有无限阶的话，而 $n(a)$ 与元素 $a$ 的阶互素，假若 $a$ 的阶有限．今设 $a$ 是 $G$ 中阶为无限的一个固定元素，而 $b$ 是此群的任意元素．此时

$$(ab)f=(ab)^{n(ab)}=a^{n(ab)}b^{n(ab)}=(af)(bf)=a^{n(a)}b^{n(b)}$$

由之当 $\{a\}\cap\{b\}=E$ 时得 $n(ab)=n(a)=\pm1$ 和 $n(b)=n(ab)=n(a)$，若是 $\{a\}\cap\{b\}\neq E$，则 $b$ 将是无限阶元素，且 $n(b)=n(a)$，因为元素 $a$ 和 $b$ 的某些幂相等．因此，对任意 $x\in G$，$n(x)=n(a)=\pm1$，亦即自同构 $f$ 是上面所举出的两者之一．

在下面我们将讨论的是，在什么条件下两个给定群的任意一个格同构不仅可由之导出它们的群同构，并且此格同构本身也是由某个群同构产生的．现在来说明，这个问题可归结为具有限个生成元的群的情形．先指出，如果给定群 $G$ 的的一个格同构 $\varphi$（即格 $S(G)$ 到某个群 $G'$ 的子群格上的格同构对应），则它对群 $G$

的任意一个子群$H$确定一个格$S(H)$与$S(H')$之间的完全确定的格同构$\varphi_H$，其中$H'$是在同构对应$\varphi$下与$H$相应的$G'$中的子群. 如果$\varphi$由群$G$的群同构产生的，则$\varphi_H$将是由群$H$的群同构产生的. 下面定理可看作此最后一个注记的逆命题[1].

设$G$是任意群，$\varphi$是它的格同构，$\mathfrak{M}$是群$G$的子群$H_\alpha$系，它满足下面三个条件:

1. $\mathfrak{M}$中任意子群$H_\alpha$具有有限生成元系.

2. 群$G$的任意一个元素至少含在$\mathfrak{M}$中的某一个子群$H_\alpha$中.

3. 对于$\mathfrak{M}$中任意两个子群$H_\alpha$、$H_\beta$可在$\mathfrak{M}$中找到一个子群$H_\gamma$，它包含这两个子群.

*若对任意$\alpha$，格同构$\varphi$在属于$\mathfrak{M}$的子群$H_\alpha$中所确定的格同构$\varphi_\alpha$是由此子群$H_\alpha$的群同构所产生的，则$\varphi$也是由群$G$的群同构产生的.*

如果对所有的$\varphi_\alpha$都是仅由一个群同构产生的，则这个定理就是十分显然的. 但在一般情况下$\varphi_\alpha$是由有限个群同构产生的，因为具有限生成元系的群显然只有有限个群自同构能产生恒等格自同构. 设

$$A_\alpha=(f_\alpha^1, f_\alpha^2, \cdots, f_\alpha^{n_\alpha})$$

是群$H_\alpha$所有产生$\varphi_\alpha$的群同构组成的系，而$\mathfrak{A}$是所有$A_\alpha$的集合. 当$H_\alpha\subseteq H_\beta$时令$A_\alpha\leqslant A_\beta$，这样可认定集合$\mathfrak{A}$是偏序的. 并且由于条件3对于任意两个系$A_\alpha$、$A_\beta$，可以在$\mathfrak{A}$中找到一个系$A_\gamma$，有$A_\alpha\leqslant A_\gamma$, $A_\beta\leqslant A_\gamma$.

对于任意一对有关系$A_\alpha\leqslant A_\beta$的系$A_\alpha$，$A_\beta$可用下面方法确定

---

1) 这个定理在可数群的情形由 Baer[2]证明了，之后 Садовский[2]对任意势的群证明了. 书中所引用的证明属于 Л. Е. Садовский 而使用的方法从本质上看是涉及有限集的偏序系理论的. 此方法的一个变种，较之这里我们所必需的更窄一些. 将§在55中叙述.

一个由系 $A_\beta$ 到系 $A_\alpha$ 的单值(一个方向的)映射 $\pi_{\beta\alpha}$. 若 $f_\beta^i \in A_\beta$, 则同构 $f_\beta^i$ 在子群 $H_\alpha$ 内确定一个格同构 $\varphi_\alpha$, 亦即 $f_\beta^i$ 在此子群上与属于 $A_\alpha$ 的某个同构 $f_\alpha^j$ 一致. 这时我们认定 $f_\alpha^j$ 是 $f_\beta^i$ 在映射 $\pi_{\beta\alpha}$ 下的象, 而 $f_\beta^i$ 叫作 $f_\alpha^j$ 的原象, 并且 $A_\alpha$ 中的任意元素 $f_\alpha^j$ 可以在 $A_\beta$ 中有一个或数个原象, 但也可能一个也没有. 映射 $\pi_{\beta\alpha}$ 显然具有下列性质.

I. $\pi_{\alpha\alpha}$ 是系 $A_\alpha$ 到自身上的恒等映射.

II. 若 $\pi_{\gamma\beta}$ 和 $\pi_{\beta\gamma}$ 已被定义, 则 $\pi_{\gamma\alpha}$ 也可定义, 并且它等于顺序施行映射 $\pi_{\gamma\beta}$ 和 $\pi_{\beta\gamma}$ 的结果.

III. 对于任意一对足码 $\alpha$ 和 $\beta$ 存在这样一个足码 $\gamma$, 使得映射 $\pi_{\gamma\alpha}$ 和 $\pi_{\gamma\beta}$ 是有定义的.

系 $A_\alpha$ 中的元素 $f_\alpha^i$ 叫作特殊的, 如果在任意系 $A_\beta$、$A_\alpha \leqslant A_\beta$ 中都可找到 $f_\alpha^i$ 关于映射 $\pi_{\beta\alpha}$ 下的原象. 任意系 $A_\alpha$ 都具有特殊元素. 事实上, 设对任意 $i$, $1 \leqslant i \leqslant n_\alpha$, 可以指出足码 $\beta_i$, 使得 $A_\alpha < A_{\beta_i}$, 但 $f_\alpha^i$ 在 $A_{\beta_i}$ 中没有原象. 此时根据 III 可取一个足码 $\gamma$, 使得对所有 $i$, 映射 $\pi_{\gamma\beta_i}$ 都有定义. 由于 II, 映射 $\pi_{\gamma\alpha}$ 也是有定义的, 因此某个元素 $f_\alpha^j$ 在 $A_\gamma$ 中有原象, 而这时它在 $A_{\beta_j}$ 中也应该有原象的, 但这和假设是矛盾的.

其次, 约定称下面集合为特殊系: 它是从某些系 $A_\alpha$ 中最多各选出一个元素所作成的集合, 并且它的任意有限子集 $M$ 如果是由系 $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \cdots, A_{\alpha_k}$ 中的元素组成, 则 $M$ 中元素在 $A_\beta$ 中有共同的原象, 此处 $A_\beta$ 是在我们的偏序下位于这些系后面的任意系. 显然, 特殊系中所有元素在它们所属的系 $A_\alpha$ 中也是特殊的.

现在假设集合 $\mathfrak{A}$ 用随便一种方式良序之[1]; 并把系 $A_\alpha$ 记作 $A^1, A^2, \cdots, A^\mu, \cdots$, 其中 $\mu$ 是超限数, 不超过某一 $\tau$. 在系 $A_1$ 中选

1) 集合 $\mathfrak{A}$ 中的良序和 $\mathfrak{A}$ 中原有的偏序之间没有任意联系. 我们继续用符号 $<$ 表示集合 $\mathfrak{A}$ 中的偏序关系.

出它的一个特殊元素并用 $f^1$ 表之. 设在每一系 $A^\mu$, $\mu<\nu$, 中已经选定元素 $f^\mu$, 并且所有这些元素 $f^\mu$, $\mu<\nu$, 的集合是特殊系. 今证, 对此系可以添加一个 $A^\nu$ 中的元素 $f^\nu$, 使得所得到的系仍是特殊系. 事实上, 设 $A^\nu=(f_{\nu 1}, f_{\nu 2}, \cdots, f_{\nu n_\nu})$, 并设对任意 $i$, $1\leqslant i\leqslant n_\nu$, 可以指出一个原选出元素的有限集

$$\text{(i)}\qquad f^{\mu_{i1}}, f^{\mu_{i2}}, \cdots, f^{\mu_{i,s(i)}},$$

其中 $f^{\mu_{ij}}\in A^{\mu_{ij}}$, $\mu_{ij}<\nu$, $j=1, 2, \cdots, s(i)$, 以及一个 $A_{\beta_i}$, 使得 $A^\nu\leqslant A_{\beta_i}$ 且 $A^{\mu_{ij}}\leqslant A_{\beta_i}$, $j=1, 2, \cdots, s(i)$, 但是同时集 (i) 中元素和元素 $f_{\nu_i}$ 在 $A_{\beta_i}$ 中却没有共同原象. 这时我们取所有集(i)的并集 $S$ 以及位于所有 $A_{\beta_i}$, $i=1, 2, \cdots, n_\nu$ 之后任意一个 $A_\gamma$. 集合 $S$ 作为特殊系的一个有限子集在 $A_\gamma$ 中应有共同原象 $f_\gamma$. 若 $f_{\nu_j}$ 是元素 $f_\gamma$ 在系 $A^\nu$ 中的原象, 则得元素 $f_{\nu_j}$ 和集($j$)中元素在 $A_\gamma$ 中有共同原象, 因而在 $A_{\beta_j}$ 中也有, 而这是和前面假设相矛盾的.

这就证明了, 可以找到一个特殊系, 它包含每一系 $A^\mu$ 中各一个元素. 若 $f^\mu$ 和 $f^\nu$ 是此系中两个元素且若 $A^\mu\leqslant A^\sigma$, $A^\nu\leqslant A^\sigma$, 则元素 $f^\sigma$ 将是元素 $f^\mu$ 和 $f^\nu$ 的共同原象, 因为依特殊的定义, 元素 $f^\mu$, $f^\nu$ 和 $f^\sigma$ 在位于 $A^\sigma$ 后的任意系 $A_\alpha$ 中有共同原象. 如果我们现在回想到, 任意 $f^\mu$ 是群 $G$ 的某个子群 $H_\mu$ 的群同构, 其中 $H_\beta\in\mathfrak{M}$, 且它产生 $H_\mu$ 的格同构 $\varphi^\mu$, 则得所有同构对应 $f^\mu$ 的全体一意地确定群 $G$ 的一个群同构 $f$, 它产生此群给定的格同构 $\varphi$. **定理证完.**

此定理是可以用来证明下面这个 Baer 定理(Baer[20]), 它说明, 任意《充分大》的阿贝尔群是由其子群格确定的.

若在阿贝尔群 $G$ 中存在有两个线性无关的无限阶元素(亦即, 它的秩——参看 § 19——不小于 2, 虽然也可能是无限的), 则此群的任意一个格同构对应是由群同构, 并且恰是两个群同构产生的.

我们只限于证明此定理的下面一个特殊情形.

*若$G$是无扭阿贝尔群，其秩异于1，则群$G$和阿贝尔群$G'$之间的任意一个格同构对应恰由这两群的两个群同构对应产生.*

首先指出，由于在本节中前面证过的引理，我们只需证明，至少存在一个群同构，它产生给定的格同构$\varphi$. 其次，因为无限循环群完全决定于自己的子群格，而群$G$的循环子群在同构对应$\varphi$下被映到群$G'$的循环子群上，故群$G'$作为阿贝尔群也是无扭群. 最后，群$G$的一切具有限生成元系的非循环子群集$\mathfrak{M}$显然满足前面定理陈述中的条件1-3. 这样，我们有权假设$G$是自由阿贝尔群，其秩是有限的但大于1.

在证明中下面引理起重要作用.

**引理** *若给定无限循环群的直和$H=X+Y$到群$H'$上的一个格同构$\varphi$且若在$\varphi$下子群$X=\{x\}$的象是循环子群$X'=\{x'\}$，而子群$Y=\{y\}$的象是循环子群$Y'$，则在$Y'$中可以找到一个生成元$y'$，使得子群$\{x'+y'\}$是子群$\{x+y\}$的象.*

实际上，因为$\varphi$是格同构，故$H'=\{X',Y'\}$，$X'\cap Y'=0$，即$H'=X'+Y'$. 子群$\{x+y\}$的象是某个循环子群$\{x_1'+y_1'\}$，其中$x_1'\in X'$，$y_1'\in Y'$. 若是元素$x_1'$不是$X'$的生成元，则子群$\{x_1'+y_1'\}$包含在群$H'$的真子群$X_1'+Y'$中，其中$X_1'=\{x_1'\}$. 这时子群$\{x+y\}$就该包含在群$H$的真子群$X_1+Y$中，其中$X_1$含在$X$中且以$X_1'$为其在$\varphi$下的象. 然而由之就该有$x\in(X_1+Y)$，而这是不可能的. 因此，$x_1'$是子群$X'$的生成元. 相应地$y_1'$是$Y'$的生成元. 这时若$x_1'$和原先选定的生成元$x'$相等，则令$y'=y_1'$，若是$x_1'=-x_1$，则取元素$-y_1'$作为$y'$.

转来证明定理. 约定用符号$U\to U'$表示群$G$的子群$U$在同构对应$\varphi$下以群$G'$的子群$U'$为其象. 设

$$G=\{a_1\}+\{a_2\}+\cdots+\{a_n\},\quad n\geqslant 2,$$

并设$\{a_i\}\to B_i'$，$i=1,2,\cdots,n$. 此时

$$G' = B_1' + B_2' + \cdots + B_n',$$

而所有子群 $B_i'$ 都是无限循环群. 在子群 $B_1$ 中选取任意一个生成元 $b_1$，而在任一子群 $B_j'$ 中, $j=2, \cdots, n$, 根据引理可选得一个生成元 $b_j$, 使得

$$\{a_1+a_j\} \to \{b_1+b_j\}. \tag{1}$$

这时, 再依引理, 有

$$\{a_1-a_j\} \to \{b_1-\varepsilon b_j\}, \varepsilon=\pm 1;$$

但是当 $\varepsilon=-1$ 时子群$\{a_1+a_j\}$和$\{a_1-a_j\}$就有共同的象, 亦即, 它们该是相等的, 这就引出在群 $G$ 中存在有阶为 2 的元素, 因此

$$\{a_1-a_j\} = \{a_j-a_1\} \to \{b_1-b_j\} = \{b_j-b_1\}, j=2, \cdots, n. \tag{2}$$

把群 $G$ 的任意元素 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n$ 映到群 $G'$ 的元素 $k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n$ 的映射是群 $G$ 和 $G'$ 的一个群同构. 今证, 这个同构对应产生给定的格同构对应 $\varphi$. 为此, 由于群 $G$ 的任意子群是循环子群之并, 只需证明, 对任意一组系数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 在同构对应 $\varphi$ 下有对应关系

$$\{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n\} \to \{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n\}.$$

首先讨论系数 $k_i$, $i=1, 2, \cdots, n$, 只取值 $0, 1, -1$ 的情形. 这里可不去讨论 $k_i$ 中只有一个异于零的情形, 而由于(1)和(2)也不要讨论有两个异于零的系数且其中一个是 $k_1$ 的情形. 若现在给我们一个元素 $k_ia_i+b_ja_j$, $k_i, k_j=\pm 1$, $i, j>1$, 则由引理有

$$\{k_ia_i+k_ja_j\} \to \{k_ib_i+\varepsilon k_jb_j\}, \varepsilon=\pm 1.$$

但是, 因为在我们的假设下有

$$\{a_1-k_ia_i\} \cap \{k_ia_i+k_ja_j\}=0,$$

故可应用引理, 亦即, 由(1)和(2)有

$$\{(a_1-k_ia_i)+(k_ia_i+k_ja_j)\} = \{a_1+k_ja_j\}$$
$$\to \{(b_1-k_ib_i)+\eta(k_ib_i+\varepsilon k_jb_j)\},$$
$$\eta=\pm 1.$$

从而由于 $\{a_1+k_ja_j\}\to\{b_1+k_jb_j\}$ 得 $(\eta-1)k_i=0$ 且 $\eta\varepsilon k_j=k_j$，亦即，$\eta=1$，以及最后有 $\varepsilon=1$，而这就是要证的.

现在设元素 $g=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n$ 的所有系数还是只取值 0, 1, $-1$，但异于零的系数个数大于 2，并且对所有这种形状的元素，但具较少，异于零的系数者，我们的结论被认为是已经证明的了. 我们从异于零的系数中指定三个，例如说是 $k_i, k_j, k_l$、此时由引理，它在这里是能被应用的，并利用归纳假设，我们有

$$\{g\}=\{(k_1a_1+\cdots+k_{i-1}a_{i-1}+k_{i+1}a_{i+1}+\cdots+k_na_n)+k_ia_i\}$$
$$\to\{(k_1b_1+\cdots+k_{i-1}b_{i-1}+k_{i+1}b_{i+1}+\cdots+k_nb_n)+\varepsilon k_ib_i\},$$
$$\varepsilon=\pm1,$$

并且类似地

$$\{g\}\to\{(k_1b_1+\cdots+k_{j-1}b_{j-1}+k_{j+1}b_{j+1}+\cdots+k_nb_n)$$
$$+\eta k_ib_i\},$$
$$\eta=\pm1.$$

比较系数并注意到在两种情形下生成元 $b_l$ 有相同的且异于零的系数，我们得 $\varepsilon k_i=k_i$，由之 $\varepsilon=1$，而这也就是要证的.

现在设元素 $g=k_1a_1+\cdots+k_na_n$ 的系数中有绝对值大于 1 者. 我们约定称元素 $g$ 的系数中绝对值最大者为 $g$ 的极大系数，并假设我们的结论对群 $G$ 中下列这些元素都已证明：其极大系数的绝对值小于元素 $g$ 的，以及虽然此绝对值等于元素 $g$ 的但其极大系数的个数较 $g$ 的小. 设 $k_i$ 是元素 $g$ 的一个极大系数；可以认定它是正的，不然的话可把元素 $g$ 换成它的逆元. 如果 $g$ 还至少有一个异于零的系数 $k_{j,j\neq i}$，则

$$\{k_1a_1+\cdots+k_{i-1}a_{i-1}+(k_i-1)a_i+k_{i+1}a_{i+1}+\cdots+k_na_n\}$$
$$\cap\{a_i\}=0.$$

因此，应用引理和归纳假设便得

$$\{g\}=\{(k_1a_1+\cdots+k_{i-1}a_{i-1}+(k_i-1)a_i+k_{i+1}a_{i+1}+\cdots+$$

$$k_n a_n)+a_i\}$$

$$\to\{(k_1b_1+\cdots+k_{i-1}b_{i-1}+(k_i-1)b_i+k_{i+1}b_{i+1}+\cdots+ k_nb_n)+\varepsilon b_i\},$$

$$\varepsilon=\pm 1.$$

当 $\varepsilon=-1$ 时，由于 $k_i\geqslant 2$ 以及归纳假设，子群$\{g\}$和$\{k_1a_1+\cdots+k_{i-1}a_{i-1}+(k_i-2)a_i+k_{i+1}a_{i+1}+\cdots+k_na_n\}$ 在同构 $\varphi$ 下该有共同的象，但这将引出在群 $G$ 中存在有 2 阶元素. 因此 $\varepsilon=1$，而这就是要证的.

最后，设 $k_i$ 是元素 $g$ 的唯一异于零的系数，即是，$g=k_ia_i$ 而 $k_i\geqslant 2$. 此时，若 $j\neq i$，则有

$$\{(k_i-1)a_i+a_j\}\cap\{a_i-a_j\}=0$$

因此，再利用引理和归纳假设有

$$\{g\}=\{[(k_i-1)a_i+a_j]+(a_i-a_j)\}$$

$$\to\{[(k_i-1)b_i+b_j]+\varepsilon(b_i-b_j)\},\quad \varepsilon=\pm 1.$$

当 $\varepsilon=-1$ 时，若是 $k_i>2$，则可知子群$\{g\}$和$\{(k_i-2)a_i+2a_j\}$在同构 $\varphi$ 下具有共同的象，因为其中第二子群生成元的极大系数小于 $k_i$，然而这是不可能的. 若是 $k_i=2$，则由$\{g\}\to\{2b_j\}$和$\{g\}\subset\{a_i\}$就该得子群$\{b_i\}$和$\{b_j\}$有异于零的交集. 因此 $\varepsilon=1$.

定理的证明至此结束.

在发展 Baer 的定理时，Петропавловская[1]证明，任意非周期的阿贝尔群由其子半群格确定，这里子半群指的是关于乘法封闭的子集. 我们还指出 Садовский[3] 中一个有趣的定理：分解成自由积的任意群由其子群格确定.（参看 § D. 14.）

# 第十二章　群的扩张

## §48. 因　子　组

如已在§10中定义过，一个群$G$叫作群$A$借助群$B$的**扩张**，如果群$A$是$G$的正规子群而商群$G/A$同构于$B$. 若群$A$和$B$已给定，则$A$借助$B$的扩张是永远存在的——例如群$A$和$B$的直积就是这样的扩张之一. 但是(参看§10)在给定群$A$和$B$后群$G$一般说不是唯一确定的，因而便有需要对群$A$借助群$B$的所有不同扩张进行完全的刻划. 这种刻划的必要性除来自群论本身的某些问题外，也来自群论对数论和组合拓扑的应用.

对于群$A$借助群$B$的扩张的研究通常是精确到它们的等价性. 这里群$A$借助群$B$的两个扩张$G$和$H$叫作**等价的**，如果在$G$和$H$之间存在一个同构对应，它在$A$上与恒等自同构重合并使对应于群$B$中同一元素的关于$A$的陪集相互对应着. 可以想象，给定的扩张$G$和$H$可能是同构的，但同时却不是等价的(与此有关的参看 Гольфанд[1]).

Schreier[2, 3]给出了如何研究扩张问题的第一个方法，他的理论将在本节中介绍. 晚一些，Baer[4]，走另外一条路，向前推进了一些，特别是，在很大程度上他把研究群$A$借助群$B$的扩张归结为当$A$是阿贝尔群的情形. 最后，在这最后一个情形于最近由于所谓同调群得到很大的推进，同调群——这些群论中的构造，它很早就在组合拓扑中被利用了而在一般群论的范围内在 Eilenberg 和 MacLane [4, 5]及 Фаддеев[1]相互独立的工作中得到了发展.

现在我们来叙述最初的 Schreier 理论. 设群$G$是其正规子

群$A$借助群$B$的扩张，约定用拉丁字母$a, b, c, \cdots$表示$A$中元素，用希腊字母$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示$B$中元素. 在群$G$关于$A$的每一陪集$gA$中各取一个元素为代表，又因为$G/A$和$B$间的同构对应把任一个陪集$gA$和$B$中某个元素$\alpha$对应起来，故陪集$gA$的代表将记作$g_\alpha$. 代表$g_\alpha$和$g_\beta$的乘积，还是由于$G/A$和$B$之间的同构对应，和代表$g_{\alpha\beta}$（取元素$\alpha$和$\beta$在群$B$中的乘积作其足码）在关于$A$的同一陪集中，即是在$A$中有元素$m_{\alpha,\beta}$，使得

$$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta}.$$

特别，取群$B$的单位元$\varepsilon$为$\alpha, \beta$，便得

$$g_\varepsilon g_\varepsilon = g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}$$

由之有$g_\varepsilon = m_{\varepsilon,\varepsilon}$.

另一方面，用元素$g_\alpha$得到的正规子群$A$的变形将是$A$的一个自同构. 约定在此自同构对应下$A$中元素$a$的象记作$a^\alpha$，

$$g_\alpha^{-1} a g_\alpha = a^\alpha.$$

相应地用$a^b$, $b \in A$, 表示元素$b^{-1}ab$. 这时有

$$(a^\alpha)^\beta = (a^{\alpha\beta})^{m_{\alpha,\beta}} \tag{1}$$

其次，由$G$中乘法的结合性得

$$\begin{aligned} g_\alpha g_\beta g_\gamma &= g_\alpha(g_{\beta\gamma} m_{\beta,\gamma}) = g_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha,\beta\gamma} m_{\beta,\gamma} \\ &= (g_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta}) g_\gamma = g_{\alpha\beta}(g_\gamma m_{\alpha,\beta}^\gamma) = g_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha\beta,\gamma} m_{\alpha,\beta}^\gamma, \end{aligned}$$

由之有

$$m_{\alpha,\beta\gamma} m_{\beta,\gamma} = m_{\alpha\beta,\gamma} m_{\alpha,\beta}^\gamma. \tag{2}$$

最后指出，若$g_\alpha a$和$g_\beta b$是$G$中任意两个元素，则它们依下面方式来相乘：

$$g_\alpha a \cdot g_\beta b = g_{\alpha\beta}(m_{\alpha,\beta} a^\beta b). \tag{3}$$

到目前为止我们是由群$A$借助群$B$的某个给定扩张出发并把这个扩张对应于元素$m_{\alpha,\beta}$的集合——称之为因子组，和自同构$a \to a^\alpha$系. 现在反过来，设在群$A$中选定一组元素$m_{\alpha,\beta}$，其中$\alpha$和

$\beta$ 独立地历遍群 $B$ 的所有元素，此外，令 $B$ 中任意元素 $\alpha$ 对应于某个群 $A$ 的自同构 $a\to a^\alpha$，并且假定满足条件(1)和(2). 今证，存在群 $A$ 借助群 $B$ 的一个扩张 $G$，使得给定元素 $m_{\alpha,\beta}$ 和给定自同构在上面描述的意义上对应于此扩张.

群 $G$ 的元素将是一些符号 $g_\alpha a$，其中 $a$ 是 $A$ 的任意元素，而符号 $g_\alpha$ 和群 $B$ 中元素 $\alpha$ 相互一一对应着. 利用公式(3)来定义 $G$ 中的乘法而来证明 $G$ 是个群. 此乘法的结合性易由其定义和条件(1)，(2)得出. 实际上，

$$(g_\alpha a\cdot g_\beta b)\cdot g_\gamma c=(g_{\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}a^\beta b)g_\gamma c=g_{\alpha\beta\gamma}m_{\alpha\beta,\gamma}(m_{\alpha,\beta}a^\beta b)^\gamma c$$

$$=g_{\alpha\beta\gamma}m_{\alpha\beta,\gamma}m_{\alpha,\beta}^\gamma(a^\beta)^\gamma b^\gamma c=g_{\alpha\beta\gamma}m_{\alpha\beta,\gamma}m_{\alpha,\beta}^\gamma(a^{\beta\gamma})^{m_{\beta,\gamma}}b^\gamma c,$$

$$g_\alpha a\cdot(g_\beta b\cdot g_\gamma c)=g_\alpha a\cdot(g_{\beta\gamma}m_{\beta,\gamma}b^\gamma c)$$

$$=g_{\alpha\beta\gamma}m_{\alpha,\beta\gamma}a^{\beta\gamma}m_{\beta,\gamma}b^\gamma c=g_{\alpha\beta\gamma}m_{\alpha,\beta\gamma}m_{\beta,\gamma}(a^{\beta\gamma})^{m_{\beta,\gamma}}b^\gamma c,$$

但由于(2)，两个等式的右侧是相同的.

今指出，当 $\alpha=\beta=\varepsilon$ 时由(1)得

$$(a^\varepsilon)^\varepsilon=(a^\varepsilon)^{m_{\varepsilon,\varepsilon}},$$

但因为元素 $a^\varepsilon$ 随 $a$ 一起历遍整个群 $A$，故

$$a^\varepsilon=m^{m_{\varepsilon,\varepsilon}} \qquad (4)$$

其次由(2)当 $\beta=\gamma=\varepsilon$ 时得

$$m_{\alpha,\varepsilon}m_{\varepsilon,\varepsilon}=m_{\alpha,\varepsilon}m_{\alpha,\varepsilon}^\varepsilon$$

由之依(4)有

$$m_{\varepsilon,\varepsilon}=m_{\alpha,\varepsilon}^\varepsilon=m_{\alpha,\varepsilon}^{m_{\varepsilon,\varepsilon}}$$

但因为用元素 $m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}$ 去变形元素 $m_{\varepsilon,\varepsilon}$ 并不改变它，故得

$$m_{\alpha,\varepsilon}=m_{\varepsilon,\varepsilon}. \qquad (5)$$

最后，令 $\alpha=\beta=\varepsilon$ 由(2)得

$$m_{\varepsilon,\gamma}m_{\varepsilon,\gamma}=m_{\varepsilon,\gamma}m_{\varepsilon,\varepsilon}^\gamma$$

由之有

$$m_{\varepsilon,\gamma}=m_{\varepsilon,\varepsilon}^\gamma. \qquad (6)$$

这时若 $g_\alpha a$ 是 $G$ 的任意元素，则由(4)和(5)有

$$g_\alpha a\cdot g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}=g_\alpha m_{\alpha,\varepsilon}a^\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}=g_\alpha m_{\varepsilon,\varepsilon}a^{m_{\varepsilon,\varepsilon}}m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}=g_\alpha a,$$

即元素 $g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}$ 是 $G$ 中右单位元．其次

$$g_\alpha a\cdot g_{\alpha^{-1}}(a^{\alpha^{-1}})m_{\alpha,\alpha^{-1}}^{-1}m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1},$$

即 $G$ 的任意元素都有右逆元．这就证明了 $G$ 是一个群．

今证，$G$ 就是所求的群 $A$ 借助群 $B$ 的扩张．若令 $A$ 中任意元素 $a$ 对应于 $G$ 中元素

$$\bar{a}=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}a,$$

则由(4)和(6)有

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}a\cdot g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}b=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}ab=\overline{ab},$$

而由 $\bar{a}=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}$（即 $\bar{a}$ 是 $G$ 的单位元）得 $a=1$．这样，所有元素 $\bar{a}$ 组成 $G$ 中的一个子群 $\bar{A}$，它同构于 $A$．其次，如果我们引入记号 $\bar{g}_\alpha=g_\alpha\cdot 1$，则依(5)有

$$\bar{g}_\alpha\bar{a}=g_\alpha 1\cdot g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}a=g_\alpha m_{\alpha,\varepsilon}m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}a=g_\alpha a \tag{7}$$

由之得，这些元素 $\bar{g}_\alpha$ 属于关于 $\bar{A}$ 的不同陪集中，这是因为若

$$\bar{g}_\beta=\bar{g}_\alpha\bar{a}\qquad \beta\neq\alpha$$

则有等式

$$g_\beta 1=g_\alpha a,$$

但由于 $\beta\neq\alpha$，上式左右两侧是 $G$ 中不同元素，因而这等式是不能成立的．另一方面，(7)说明，在关于 $\bar{A}$ 的每一左陪集中有形如 $\bar{g}_\alpha$ 的一个元素．由

$$\bar{a}\bar{g}_\alpha=g_\varepsilon m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1}a\cdot g_\alpha 1=g_\alpha m_{\varepsilon,\alpha}(m_{\varepsilon,\varepsilon}^{-1})^\alpha a^\alpha=g_\alpha a^\alpha=\bar{g}_\alpha\overline{a^\alpha}$$

（这里利用了等式(6)和(7)）得

$$\bar{g}_\alpha^{-1}\bar{a}\bar{g}_\alpha=\overline{a^\alpha}\in\bar{A},$$

即是说 $\bar{A}$ 是 $G$ 的正规子群，而用元素 $\bar{g}_\alpha$ 作 $\bar{A}$ 的变形在其中产生的自同构与群 $A$ 的原给自同构 $a\to a^\alpha$ 重合[1]．最后，等式

---

1）这里要把 $\bar{A}$ 和 $A$ 等同起来，并相应地把 $\bar{A}$ 的自同构和 $A$ 的自同构等同起来．——译者注．

$$\bar{g}_\alpha\cdot\bar{g}_\beta=g_\alpha 1\cdot g_\beta 1=g_{\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}=\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{m}_{\alpha,\beta}$$

说明商群 $G/\bar{A}$ 同构于 $B$, 即群 $G$ 是群 $\bar{A}$ 借助 $B$ 的一个扩张，并且假若作为关于 $\bar{A}$ 的左陪集的代表刚好取元素 $\bar{g}_\alpha$, 此扩张的因子组与原给的元素 $m_{\alpha,\beta}$ 集重合.

最后，把刚叙述的群 $G$ 的构造和前面在定义因子组时曾说过的相比较并注意特别是等式(3), 我们得到，与因子组 $m_{\alpha,\beta}$ 和自同构 $a\to a^\alpha$ 系相对应的群 $A$ 借助群 $B$ 之任意扩张与上面作出的扩张 $G$ 是等价的.

我们就有下面结果.

*群 $A$ 的任意元素 $m_{\alpha,\beta}$ 组和此群的自同构 $a\to a^\alpha$ 系，其中 $\alpha,\beta\in B$, 如果满足条件(1)和(2), 就对应着群 $A$ 借助群 $B$ 的一个扩张，它在等价的意义下一意确定. 反过来，$A$ 借助 $B$ 的任意扩张可以由这样的元素组和自同构系给出.*

在一方面是扩张另一方面是因子组和自同构系之间的这个对应并不是一一的, 因为在扩张 $G$ 的关于 $A$ 的陪集中选择代表 $g_\alpha$ 是完全随意的. 若 $G$ 是群 $A$ 借助群 $B$ 的一个扩张且若当选用代表 $g_\alpha$ 时此扩张由因子组 $m_{\alpha,\beta}$ 和自同构系 $\varphi_\alpha$ 给出, 而选用代表 $g'_\alpha=g_\alpha c_\alpha$ 时由因子组 $m'_{\alpha,\beta}$ 和自同构系 $\varphi'_\alpha$ 给出，则群 $A$ 的这些新的自同构 $\varphi'_\alpha$ 是由原来相应于同一 $\alpha$ 的自同构 $\varphi_\alpha$ 右乘以一个内自同构而得，并且这个内自同构是由元素 $c_\alpha$ 在群 $A$ 中确定的. 其次，由

$$g'_\alpha\cdot g'_\beta=g_\alpha c_\alpha\cdot g_\beta c_\beta=g_{\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}c_\alpha^\beta c_\beta=g'_{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}^{-1}m_{\alpha,\beta}c_\alpha^\beta c_\beta$$

得

$$m'_{\alpha,\beta}=c_{\alpha\beta}^{-1}m_{\alpha,\beta}c_\alpha^\beta c_\beta. \tag{8}$$

反之, 若给定两个扩张 $G$ 和 $G'$ 且若在 $A$ 中可以找到元素 $c_\alpha$, $\alpha\in B$, 使得给出此两扩张的因子组和自同构系之间有刚刚描述过的联系, 则容易验证, 把 $G$ 中元素 $g_\alpha a$ 映到 $G'$ 中元素 $g'_\alpha c_\alpha^{-1}a$ 的对应就

是确定$G$和$G'$间等价关系的同构对应. 最后,注意到当对所有$\alpha$都有$c_\alpha=1$时因子组和自同构系都不改动,我们有下面结果.

群$A$借助群$B$的两个扩张$G$和$G'$是由因子组$m_{\alpha,\beta}$和$m'_{\alpha,\beta}$及自同构系$\varphi_\alpha$和$\varphi'_\alpha$给出的. 它们是等价的当且仅当$B$中任意元素$\alpha$可对应于$A$中元素$c_\alpha$,使得任意自同构$\varphi'_\alpha$等于自同构$\varphi_\alpha$右乘以由元素$c_\alpha$作得的群$A$的内自同构,而因子之间有关系式(8).

刚介绍完的这个理论当然不能认为是完善的. 在此理论中对已给群$A$借助已给群$B$的不同扩张的描述归结为寻求群$A$的某些元素组和自同构系,然而要求它们满足相当复杂的条件,且一般说不很减轻对非等价扩张全体的描述. 在下面几节中将指出一些路子,按照这些路子可较好地接近于这样的描述,现在我们就来作一些准备性的工作.

约定用$\mathfrak{A}$表示群$A$的自同构群关于内自同构子群的商群,$\mathfrak{A}$的元素将用带足码的$\mathfrak{a}$表示并称为之为群$A$的自同构类.

这时若$G$是群$A$借助群$B$的一个扩张且若$B$中元素$\alpha$对应于$G$中的陪集$g_\alpha A$, 则由$g_\alpha A$中的不同元素作此群的变形所诱导出的群$A$的自同构彼此只差一个内自同构的乘因子, 即是它们属于同一自同构类. 这样$B$的任意元素$\alpha$就对应于群$\mathfrak{A}$的一个元素$\mathfrak{a}_\alpha$,并且由$g_\alpha A\cdot g_\beta A=g_{\alpha\beta}A$和自同构乘法的定义可得

$$\mathfrak{a}_\alpha\cdot\mathfrak{a}_\beta=\mathfrak{a}_{\alpha\beta}.$$

换言之,扩张$G$对应着群$B$到群$\mathfrak{A}$内某个完全确定的同态对应,将称之为伴随此扩张的同态对应.

设给定群$A$借助群$B$的两个等价的扩张. 在上面我们确立了存在于群$A$的,相应于等价扩张的自同构$a\to a^\alpha$之间的关系,由之可得,这两个扩张必由群$B$到群$\mathfrak{A}$的同一同态对应所伴随. 这就使得我们在下面可以局限于研究群$A$借助群$B$的非等价扩张, 它们都具有某个给定的伴随同态对应.当然此时还必须确定,$B$到$\mathfrak{A}$

内什么样的同态对应一般说能伴随 $A$ 借助 $B$ 的某些扩张.

## § 49. 阿贝尔群的扩张. 同调群

在本节中我们将研究阿贝尔群 $A$ 借助任意群 $B$ 的扩张. 如上面说过的, 此时可仅限于研究由一个给定的 $B$ 到群 $\mathfrak{A}$ 内的同态对应伴随的那些扩张. 在我们这个情形中群 $\mathfrak{A}$ 和群 $A$ 的自同构群重合, 因此可以把群 $B$ 看成阿贝尔群 $A$ 的算子的群. 这就是说, 定义了乘积 $a\alpha$, $a\in A$, $\alpha\in B$, 同时 $a\alpha\in A$ 且满足以下条件:

(1) $(ab)\alpha = a\alpha\cdot b\alpha$

(2) $a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta$

(3) $a\varepsilon = a$, 其中 $\varepsilon$ 是群 $B$ 的单位元.

为了强调, 这里所考察的 $A$ 借助 $B$ 的扩张具有一个给定的伴随同态对应, 亦即把群 $B$ 的元素作为算子以怎样方法作用到 $A$ 上, 而把这方法完全固定下来了, 我们将把这些扩张说成是阿贝尔群 $A$ 借助算子群 $B$ 的扩张.

若 $G$ 是一个这样的扩张, 则群 $A$ 的自同构 $a\to a^{\alpha}$ (参看前一节)与陪集 $g_{\alpha}A$ 的代表选择无关, 且和算子 $\alpha$ 引起的自同构是一致的, 亦即 $a^{\alpha} = a\alpha$. 这样, 阿贝尔群 $A$ 借助算子群 $B$ 的扩张就完全决定于适合前节中条件(2)的因子组 $m_{\alpha,\beta}$, 由于群 $A$ 的交换性, 条件(1)与算子群的定义中之条件(2)是一样的.

我们来考察一切可能的因子组 $m_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta\in B$, 它们都是些在保证条件(2) 的情况下由具有算子群 $B$ 的群 $A$ 中选出的. 明显地存在一个这样的组, 即是对所有 $\alpha$ 和 $\beta$, $m_{\alpha,\beta} = 1$, 若 $m_{\alpha,\beta}$, $n_{\alpha,\beta}$ 是两个这样的因子组, 则乘积

$$m_{\alpha,\beta}n_{\alpha,\beta}$$

由于 $A$ 的交换性也满足条件(2), 即也组成因子组.

这个因子组的《乘法》是结合的和交换的, 对所有 $\alpha$, $\beta$, $m_{\alpha,\beta} = 1$

所组成的因子组起单位元的作用，组 $m_{\alpha,\beta}$ 的逆是组 $m_{\alpha,\beta}^{-1}$，易见它也满足条件(2). 这样我们就得到了一个阿贝尔群，将用 $F(A,B)$ 表之.

若令 $B$ 中任意元素 $\alpha$ 对应于 $A$ 中任意一个元素 $c_\alpha$，则元素组

$$m_{\alpha,\beta}=c_{\alpha\beta}^{-1}(c_\alpha\beta)c_\beta \tag{9}$$

是满足条件 (2) 的，即是一个因子组. 所有这样的因子组作成群 $F(A,B)$ 中的一个子群 $T(A,B)$.

由上一节的结果，特别是由(8)，可得，**阿贝尔群 $A$ 借助算子群 $B$ 的所有非等价扩张与群 $F(A,B)$ 关于子群 $T(A,B)$ 的倍集，亦即和商群**

$$F(A,B)/T(A,B)$$

**的元素之间有一个一一对应关系.**

称此商群为**阿贝尔群 $A$ 借助算子群 $B$ 的扩张群.**

当然，扩张群也可以这样来构造，取等价的扩张类作为其元素而用适当方式定义这些类的乘法. 起源于这种构造的扩张的乘法，将在 §51 由于另外一个原因介绍给读者.

关于研究某个群的所有自同构的问题曾归结为寻求其自同构群，与此类似地，现在可以把研究阿贝尔群 $A$ 借助算子群 $B$ 的所有非等价扩张的问题看作是寻求相应的扩张群的问题. 本节下面的讨论就是针对这一目的的.

**同调群**　将把其元素为 $a,b,c,\cdots$ 的阿贝尔群 $A$ 记成加法的，而把其元素为 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 的算子群 $B$ 记成乘法的. 将任意在群 $A$ 中取值的，群 $B$ 中的一个 $n$ 元函数 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 称为 **$n$-维链.** 特别，我们把群 $A$ 的元素就认定为 0-维链.

如果我们用等式

$$(f_1+f_2)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=f_1(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+f_2(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

来定义 $n$-维链的加法，便得到一个阿贝尔群 $C^n(B,A)$. 特别，

$C^0(B, A)=A$.

令任意 $n$-维链 $f, n\geqslant 0$, 对应于一个 $(n+1)$-维链 $\nabla f$, 称之为链 $f$ 的界, 并定义为:

$$(\nabla f)(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1})=f(\alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1})$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_k\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \cdots, \alpha_{n+1})$$
$$+(-1)^{n+1}f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\alpha_{n+1} \tag{10}$$

容易验证

$$\nabla(f_1+f_2)=\nabla f_1+\nabla f_2, \tag{11}$$

即是对应 $f\to\nabla f$ 是群 $C^n(B, A)$ 到群 $C^{n+1}(B, A)$ 中的同态对应.

还有下面重要的关系式:

$$\nabla(\nabla f)=0 \tag{12}$$

即是, 界的界等于零.

实际上, 若 $f$ 是 $n$-维链, 则 $\nabla(\nabla f)$ 是一个 $(n+2)$-维链, 即是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+2}$ 的函数. 利用(10)去计算它, 我们将得到等式(12), 因为任一被加项都必出现两次且具相反的符号. 设在展开 $\nabla(\nabla f)$ 时指定的被加项是象下面这样出现的: 在第一次应用等式(10)之后取第 $k$ 项, $0\leqslant k\leqslant n+2$, 而对此项再应用等式(10)而取其第 $l$ 项, $0\leqslant l\leqslant n+1$. 这时此项的符号是 $(-1)^{k+l}$. 对每一被加项这些 $k$ 和 $l$ 都是什么, 在下表中给出, 因之此表也就结束了等式(12)的证明.

称 $n$-维链 $f$ 为 $n$-维圈, 如果 $\nabla f=0$. 由(11)得 $n$-维圈组成群 $C^n(B, A)$ 的子群, 将用 $Z^n(B, A)$ 表之.

另一方面, 当 $n>0$ 时可作为某 $(n-1)$-维链之界的 $n$-维链由于(11)组成群 $C^n(B, A)$ 的一个子群, 我们将用 $D^n(B, A)$ 表示它. 因为由于(12)每个界都是圈, 故有

$$D^n(B, A)\subseteq Z^n(B, A). \tag{13}$$

| 被加项的类型 | $k, l$ | 符号 |
|---|---|---|
| $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{k+2}), 2 \leqslant k \leqslant n+1$ | $k, k-1$<br>$k-1, k-1$ | $(-1)^{2k-1}$<br>$(-1)^{2k-2}$ |
| $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_l\alpha_{l+1}, \cdots, \alpha_k\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{n+2})$ $1 \leqslant l, l+1 \leqslant k, k \leqslant n+1$ | $k, l$<br>$l, k-1$ | $(-1)^{k+l}$<br>$(-1)^{k+l-1}$ |
| $f(\alpha_2, \cdots, \alpha_k\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{n+2}), 2 \leqslant k \leqslant n+1$ | $k, 0$<br>$0, k-1$ | $(-1)^k$<br>$(-1)^{k-1}$ |
| $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_k\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{n+1})\alpha_{n+2}, 1 \leqslant k \leqslant n$ | $n+2, k$<br>$k, n+1$ | $(-1)^{n+k+2}$<br>$(-1)^{n+k+1}$ |
| $f(\alpha_3, \cdots, \alpha_{n+2})$ | $1, 0$<br>$0, 0$ | $-1$<br>$1$ |
| $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$ | $n+2, n+1$<br>$n+1, n+1$ | $(-1)^{2n+3}$<br>$(-1)^{2n+2}$ |

当 $n=0$ 时我们令 $D^0(B, A)=0$. 在此情形包含关系(13)仍然是对的.

商群

$$H^n(B, A)=Z^n(B, A)/D^n(B, A)$$

叫作群 $B$ 在群 $A$ 上的 $n$ 次同调群 [1].

当 $n=0, 1, 2$ 时的同调群. 依定义, 0-维链 $f$ 就是 $A$ 中元素 $a$. 这时依(10)有

$$(\nabla f)(\alpha_1)=a-a\alpha_1 \tag{14}$$

因此 $f$ 是圈当且仅当对所有 $B$ 中 $\alpha_1$ 有 $a\alpha_1=a$. 注意到 $D^0(B, A)=0$, 我们有

0 次同调群 $H^0(B, A)$ 是群 $A$ 的子群, 它由此群中一切在 $B$ 的所有算子下映到自身的元素组成.

1) 我们该是更接近于拓扑中所使用的术语, 如果称此群为上同调的群或 $\nabla$-同调群或上同调群.

其次，若 $f=f(\alpha_1)$ 是 1-维链，则依(10)有

$$(\nabla f)(\alpha_1, \alpha_2)=f(\alpha_2)-f(\alpha_1\alpha_2)+f(\alpha_1)\alpha_2, \tag{15}$$

随之，链 $f(\alpha_1)$ 是圈当且仅当

$$f(\alpha_1\alpha_2)=f(\alpha_2)+f(\alpha_1)\alpha_2. \tag{16}$$

群 $B$ 到群 $A$ 内的一个映射若满足这个条件将称之为交义的研同态对应. 有一系列论文研究它们，特别是与对域论的应用有关究. 我们指出这些论文中的第一个——Schur[2]，以及 Baer[28, 31].

另一方面，由于(14)链 $f(\alpha_1)$ 属于子群 $D^1(B, A)$ 当且仅当在 $A$ 中有元素 $a$，使得

$$f(\alpha_1)=a-a\alpha_1. \tag{17}$$

这样的交义同态对应叫作主的. 因此，1 次同调群 $H^1(B, A)$ 是 $B$ 到 $A$ 内交义同态对应的群关于主同态对应子群的商群.

我们更有兴趣的是 2 次同调群. 若 $f(\alpha_1, \alpha_2)$ 是 2-维链，则依(10)有

$$\begin{aligned}(\nabla f)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=&f(\alpha_2, \alpha_3)-f(\alpha_1\alpha_2, \alpha_3)\\&+f(\alpha_1, \alpha_2\alpha_3)-f(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3.\end{aligned} \tag{18}$$

因此，$f$ 是圈当且仅当

$$f(\alpha_1, \alpha_2\alpha_3)+f(\alpha_2, \alpha_3)=f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)+f(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 \tag{19}$$

或者与 (2) 比较，这就是说 $f$ 是具有算子群 $B$ 之群 $A$ 的一个因子组. 因而

$$Z^2(B, A)=F(A, B).$$

另一方面，依(15)链 $f(\alpha_1, \alpha_2)$ 属于 $D^2(B, A)$ 当且仅当存在这样的 1-维链 $\varphi(\alpha_1)$，使得

$$f(\alpha_1, \alpha_2)=\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1\alpha_2)+\varphi(\alpha_1)\alpha_2. \tag{20}$$

将它与(9)比较，我们得到

$$D^2(B, A)=T(A, B).$$

这样，2 次同调群 $H^2(B, A)$ 与群 $A$ 借助算子群 $B$ 的扩张群重合.

在 Eilenberg, MacLane[4], [6] 中可以找到对同调群 $H^n(B, A)$, $n \geqslant 3$, 的某种解释.

## § 50. 2 次同调群的计算

上面得到的，把阿贝尔群 $A$ 借助算子群 $B$ 的扩张群，解释为 $B$ 到 $A$ 内的 2 次同调群，还没有把寻求这个群变得容易一些. 但是，存在有一些方法，它们把计算群 $H^n(B, A)$ 归结到计算某个群 $H^k(B, A')$，其中 $k<n$，然而一般说群 $A'$ 比原来的群 $A$ 有着较复杂的结构. 对这些方法中的一个加以改进，就得到将在本节中叙述的计算群 $H^2(B, A)$ 的一个方法，它利用以自由群的商群表示群 $B$ 的任意一个表示(参看 MacLane[1]).

设

$$B = S/R,$$

其中 $S$ 是自由群，其元素记作 $x, y, \cdots$. 如果对群 $A$ 中任一元素 $a$ 和 $S$ 中任意元素 $x$ 令

$$ax = a(xR), \tag{21}$$

并在这里把陪集 $xR$ 看成群 $B$ 的元素，则群 $S$ 就成为群 $A$ 的算子的群. 事实上，上节中的条件 1) —3) 是容易验证的. 因为 $R$ 和群 $B$ 的单位元是一致的，故由(21)得，对 $R$ 中任意元素 $r$ 有

$$ar = a. \tag{22}$$

另一方面，用群 $S$ 中任一元素对正规子群 $R$ 的变形在 $R$ 中产生一个自同构，这使得可以认定群 $S$ 的元素也是群 $R$ 的算子.

这时群 $R$ 和 $A$ 都是带算子的群，且具有相同的算子群 $S$. 随之，群 $R$ 到群 $A$ 内的带算子的同态对应 $\varphi$ 就是 $R$ 到 $A$ 的同态对应，并使得

$$\varphi(x^{-1}rx)=\varphi(r)x, \qquad r\in R, x\in S. \tag{23}$$

若 $\varphi$ 和 $\psi$ 是 $R$ 到 $A$ 内的两个带算子同态对应，则由等式

$$(\varphi+\psi)(r)=\varphi(r)+\psi(r)$$

所定义的它们之和也是带算子同态对应. 按此加法 $R$ 到 $A$ 的带算子同态对应组成阿贝尔群, 我们将称之为带算子同态对应群并用 $Q(R, A; S)$ 表之.

其次，我们来考察群 $S$ 到群 $A$ 的某个交义同态对应 $\varphi(x)$, 亦即(参看(16))

$$\varphi(xy)=\varphi(y)+\varphi(x)y, \tag{24}$$

则由于(22)，当把它应用到 $R$ 中元素上对应 $\varphi$ 是一个同态对应. 此同态对应是一个带算子同态对应，这是因为，由(24)和(22)有

$$\varphi(x^{-1}rx)=\varphi(x)+\varphi(x^{-1}r)x=\varphi(x)+\varphi(r)x+\varphi(x^{-1})rx$$
$$=\varphi(x)+\varphi(r)x+\varphi(x^{-1})x.$$

在此等式中设 $r=1$ 并注意到由(24)有等式 $\varphi(1)=0$, 我们得到

$$\varphi(x)+\varphi(x^{-1})x=0,$$

因而

$$\varphi(x^{-1}rx)=\varphi(r)x.$$

用 $Q'(R, A; S)$ 表示在上示意义下由 $S$ 到 $A$ 的交义同态产生之 $R$ 到 $A$ 的带算子同态对应的全体. 它是群 $Q(R, A; S)$ 中的子群，这是因为 $S$ 到 $A$ 内的交义同态对应依加法

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

组成群，即群 $Z^1(S, A)$.

我们的目的是证明下面的 MacLane 定理.

*群 $B$ 在群 $A$ 上的2次同调群同构于带算子同态对应群 $Q(R, A; S)$ 关于子群 $Q'(R, A; S)$ 的商群：*

$$H^2(B, A)\simeq Q(R, A; S)/Q'(R, A; S).$$

为了证明，首先在群 $S$ 关于正规子群 $R$ 的每一陪集中各选一

个代表，并把相应于群 $B$ 中元素 $\alpha$ 的那个陪集的代表，记作 $s_\alpha$，因而有

$$\alpha = s_\alpha R. \tag{25}$$

这时

$$s_\alpha s_\beta = s_{\alpha\beta} r(\alpha, \beta), \tag{26}$$

其中 $r(\alpha, \beta) \in R$，并且当然这些因子 $r(\alpha, \beta)$ 之间有型如等式(2)的等式. 在陪集 $R$ 中我们选取单位元作其代表，即 $s_\varepsilon = 1$，其中 $\varepsilon$ 是群 $B$ 的单位元.

今令 $\varphi(r)$ 为群 $R$ 到群 $A$ 内的一个任意带算子的同态对应. 此时

$$\bar{\varphi}(\alpha, \beta) = \varphi(r(\alpha, \beta)) \tag{27}$$

是群 $B$ 到群 $A$ 内的 2-维链，即是群 $C^2(B, A)$ 的元素. 它还是圈，这是因为

$$(\nabla\bar{\varphi})(\alpha, \beta, \gamma) = \varphi(r(\beta, \gamma)) - \varphi(r(\alpha\beta, \gamma) + \varphi(r(\alpha, \beta\gamma)) - [\varphi(r(\alpha, \beta))]\gamma.$$

再利用(25)、(21)以及带算子同态对应的定义，即(23)，我们有

$$[\varphi(r(\alpha, \beta))]\gamma = [\varphi(r(\alpha, \beta))]s_\gamma = \varphi(s_\gamma^{-1} r(\alpha, \beta) s_\gamma).$$

最后注意到 $\varphi$ 是 $R$ 到 $A$ 内的同态对应，而元素 $r(\alpha, \beta)$ 之间有型如(2)的等式，我们就得

$$(\nabla\bar{\varphi})(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

即是 $\bar{\varphi}(\alpha, \beta) \in Z^2(B, A)$.

对应关系

$$\varphi(r) \longrightarrow \bar{\varphi}(\alpha, \beta), \tag{28}$$

把 $R$ 到 $A$ 的两个带算子同态对应之和映到相应的 2-维圈之和，即是群 $Q(R, A; S)$ 到群 $Z^2(B, A)$ 的一个同态对应. 把后面这个群用自然方式映到其商群 $H^2(B, A)$ 上，我们便得到群 $Q(R, A; S)$ 到群 $H^2(B, A)$ 内的同态对应.

今证，这个同态对应把群 $Q(R, A; S)$ 映到整个群 $H^2(B, A)$ 上. 为此取群 $H^2(B, A)$的任一元素，也就是群 $Z^2(B, A)$关于子群 $D^2(B, A)$的任一陪集，并在此陪集中取一个圈 $f(\alpha, \beta)$ 为其代表. 同时我们可以认定此圈是标准化的，即是满足等式

$$f(\alpha, \varepsilon)=f(\varepsilon, \beta)=0, \tag{29}$$

其中 $\varepsilon$ 是群 $B$ 的单位元.

这是因为，我们知道，随便选定的这个圈 $f(\alpha, \beta)$总可看作群 $A$ 借助算子群 $B$ 的某个扩张的因子组，且它是由此扩张关于 $A$ 的陪集之代表的某个选法而得到的. 若是改变代表的选法而取单位元作为单位陪集的代表，则得到与原来的相等价的一个扩张，亦即新的因子组仍在我们上面取定的群$Z^2(B, A)$关于子群 $D^2(B, A)$的某个陪集中. 同时这个新的因子组已经是标准化的了，这可由等式(5)和(6)看出.

现在我们来构造群 $S$ 到群 $A$ 的一个映射 $\varphi(x)$，使得它具有下面性质：对 $S$ 中任意元素 $x, y$ 有

$$\varphi(xy)=\varphi(x)y+\varphi(y)+f(xR, yR). \tag{30}$$

因为圈 $f(\alpha, \beta)$是标准化的，则由(30)得

$$\varphi(1)=0. \tag{31}$$

其次，如果我们在群 $S$ 中选取一个自由生成元系并对此系中任意元素 $s$ 令

$$\varphi(s)=0, \tag{32}$$

则这不会和(30)相矛盾. 这时由(30)得

$$\varphi(s^{-1})=-f(sR, s^{-1}R). \tag{33}$$

设元素 $y$ 在选定的自由生成元下之最简表示式的长小于 $k$，且对所有这些 $y$，都已定义了 $\varphi(y)$，并设元素 $x$ 的长是 $k$. 把字 $x$ 表成两个字的乘积且在这两个字之间没有可消的，再利用(30)我们可定义值 $\varphi(x)$，这与把 $x$ 表成长为 $l_1$ 和 $l_2$ 两个字的积之选择

无关，其中 $l_1+l_2=k$. 这是因为根据 (30) 以及对圈 $f$ 成立的等式(19)，易证

$$\varphi(x\cdot yz)=\varphi(xy\cdot z),$$

因而若字 $x$ 具有形状

$$x=s_1^{\varepsilon_1}s_2^{\varepsilon_2}\cdots s_k^{\varepsilon_k},$$

则

$$\varphi(s_1^{\varepsilon_1}\cdot(s_2^{\varepsilon_2}\cdots s_k^{\varepsilon_k}))=\varphi((s_1^{\varepsilon_1}s_2^{\varepsilon_2})\cdot(s_3^{\varepsilon_3}\cdots s_k^{\varepsilon_k}))=\cdots$$
$$=\varphi((s_1^{\varepsilon_1}\cdots s_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}})\cdot s_k^{\varepsilon_k}).$$

这样，对应关系 $\varphi(x)$对所有 $x$ 都定义好了. 然而需要证明，等式(30)实际上对任意 $x$ 和 $y$ 都是成立的. 若在字 $x$ 和 $y$ 之间不存在任何可消的，则这由上段中所说的就已得出. 另一方面，容易验证，当 $x, y$ 中有一个是 1，还有它们两个的长都是 1，我们的结论是正确的. 事实上，

$$\varphi(s^{-1}s)=\varphi(1)=0,$$

而依(32)和(33)，有

$$\varphi(s^{-1})s+\varphi(s)+f(s^{-1}R, sR)=-f(sR, s^{-1}R)s+f(s^{-1}R, sR),$$

注意到(21)，令 $\alpha_1=sR, \alpha_2=s^{-1}R, \alpha_3=sR$ 由(19)可以推得此等式的右侧是等于零的.

这样，我们可设对于任意元素对，其长之和小于元素 $x$ 和 $y$ 之长的和者，等式(30)已经证明，并设在元素 $x$ 和 $y$ 之间存在有可消部分. 若

$$x=x's, \quad y=s^{-1}y'$$

其中 $s$ 是自由生成元中的一个，而表示式是最简的，则依归纳假设，

$$\varphi(xy)=\varphi(x'y')=\varphi(x')y'+\varphi(y')+f(x'R, y'R).$$

另一方面，由(32)和(33)有

$$\varphi(x)=\varphi(x')s+f(x'R, sR),$$

$$\varphi(y)=-f(sR,s^{-1}R)y'+\varphi(y')+f(s^{-1}R,y'R)$$

因而

$$\begin{aligned}\varphi(x)y+\varphi(y)+f(xR,yR)&=\varphi(x')y'+f(x'R,sR)s^{-1}y'\\&\quad-f(sR,s^{-1}R)y'+\varphi(y')+f(s^{-1}R,y'R)\\&\quad+f(x'sR,s^{-1}y'R)\\&=\varphi(x')y'+\varphi(y')+f(x'R,y'R).\end{aligned}$$

在得到最后这个等式的过程中我们两次用到等式(19),第一次是令$\alpha_1=sR,\alpha_2=s^{-1}R,\alpha_3=y'R$,而之后是令$\alpha_1=x'R,\alpha_2=sR,\alpha_3=s^{-1}y'R$.

用同样方法可检验 $x=x's^{-1},y=sy'$ 的情形.

我们构造了群$S$到群$A$内的一个对应$\varphi(x)$,它具有性质(30). 如果 $r\in R$,则由(22)和(29),有

$$\varphi(xr)=\varphi(x)+\varphi(r).\tag{34}$$

特别,当 $r_1,r_2\in R$,有

$$\varphi(r_1r_2)=\varphi(r_1)+\varphi(r_2),$$

亦即对应 $\varphi(r),r\in R$, 是$R$到$A$内的同态对应. 这个同态对应还是带算子的同态对应,这是因为,

$$\varphi(x^{-1}rx)=\varphi(x^{-1}r)x+\varphi(x)+f(x^{-1}rR,xR)$$

或者由(34),

$$\varphi(x^{-1}rx)=\varphi(x^{-1})x+\varphi(r)x+\varphi(x)+f(x^{-1}R,xR).$$

当 $r=1$ 时便得

$$\varphi(x^{-1}x)=\varphi(1)=0=\varphi(x^{-1})x+\varphi(x)+f(x^{-1}R,xR),$$

因此有

$$\varphi(x^{-1}rx)=\varphi(r)x.$$

现在来证明,映射(28)把带算子同态对应 $\varphi(r)$映到我们选定的,群$Z^2(B,A)$中关于子群$D^2(B,A)$的那个陪集上. 事实上,由于(27),(26),(21),(25),(30)有

$$\bar\varphi(\alpha,\beta)=\varphi(r(\alpha,\beta))=\varphi(s_{\alpha\beta}^{-1}s_\alpha s_\beta)=\varphi(s_{\alpha\beta}^{-1})\alpha\beta+\varphi(s_\alpha s_\beta)$$

$$+f(s_{\alpha\beta}^{-1}R, s_\alpha s_\beta R)=\varphi(s_{\alpha\beta}^{-1})\alpha\beta+\varphi(s_\alpha)\beta+\varphi(s_\beta)$$
$$+f(\alpha,\beta)+f((\alpha\beta)^{-1},\alpha\beta).$$

但是

$$0=\varphi(1)=\varphi(s_{\alpha\beta}^{-1}s_{\alpha\beta})=\varphi(s_{\alpha\beta}^{-1})\alpha\beta+\varphi(s_{\alpha\beta})+f((\alpha\beta)^{-1},\alpha\beta).$$

因此

$$\bar{\varphi}=(\alpha,\beta)-f(\alpha,\beta)=\varphi(s_\alpha)\beta+\varphi(s_\beta)-\varphi(s_{\alpha\beta}),$$

又因为 $\varphi(s_\alpha)$可以看成是群 $B$ 到群 $A$ 的一个映射，亦即可看成群 $C^1(B,A)$ 中的元素，故由(20)有

$$\bar{\varphi}(\alpha,\beta)-f(\alpha,\beta)\in D^2(B,A), \tag{35}$$

而这也就是要证的.

这样，我们有了群 $Q(R,A;S)$ 到整个群 $H^2(B,A)$ 上的一个同态对应. 现在要证明基本定理，只要能够证明，此同态对应的核是子群 $Q'(R,A;S)$，也就是要证明，在映射(28)下 $Q'(R,A;S)$ 的元素且仅有它们被映到 $D^2(B,A)$ 中的元素上.

设 $\varphi(r)$是群 $R$ 到群 $A$ 的一个带算子的同态对应，并且它是由群 $S$ 到群 $A$ 的一个交义同态对应 $\varphi(x)$产生的. 交义同态对应的定义等式(24)是等式(30)的一个特殊情况，即是若取 $f(\alpha,\beta)$为零圈

$$f(\alpha,\beta)=0, \tag{36}$$

则(30)就变成(24). 因为在前面证明的最后一段中除去(30)外没有使用映射 $\varphi(x)$任何别的性质，故在现在的情况由(36)得包含关系(35)具有形状

$$\bar{\varphi}(\alpha,\beta)\in D^2(B,A),$$

即是在映射(28)下带算子的同态对应真是映入子群 $D^2(B,A)$.

反之，设带算子的同态对应$\varphi(r)$在(28)下映入子群$D^2(B,A)$. 随之存在一个 1-维链 $\psi(\alpha)\in C^1(B,A)$，使得

$$\bar{\varphi}(\alpha,\beta)=\psi(\beta)-\psi(\alpha\beta)+\psi(\alpha)\beta. \tag{37}$$

我们指出有

$$\psi(\varepsilon)=0, \tag{38}$$

其中 $\varepsilon$ 是群 $B$ 的单位元. 事实上, 由于 $s_\varepsilon=1$ 由等式(28)便得等式 $r(\varepsilon,\beta)=1$, 又因为 $\varphi$ 同态地把 $R$ 映入 $A$, 则

$$\bar{\varphi}(\varepsilon,\beta)=\varphi(r(\varepsilon,\beta))=\varphi(1)=0.$$

因此由(37)有

$$\psi(\beta)-\psi(\beta)+\psi(\varepsilon)\beta=\psi(\varepsilon)\beta=0.$$

令 $\beta=\varepsilon$, 注意到算子的群定义中的条件 3) 便得(38).

今用下面方法定义群 $S$ 到群 $A$ 的一个映射 $f(x)$. $S$ 中任意元素 $x$ 可唯一地表成形式

$$x=s_\alpha r, \qquad r\in R.$$

我们令

$$f(x)=\psi(\alpha)+\varphi(r). \tag{39}$$

如果 $x\in R$, 则 $\alpha=\varepsilon$, 因此由等式 $s_\varepsilon=1$ 和(38)得: 对所有 $r\in R$

$$f(r)=\varphi(r).$$

现在剩下来要证的是, 映射 $f(x)$ 是群 $S$ 到群 $A$ 的一个交义同态对应. 若

$$x=s_\alpha r', \qquad y=s_\beta r'$$

则由(26)有

$$xy=s_{\alpha\beta}[r(\alpha,\beta)(s_\beta^{-1}rs_\beta)r'].$$

因此, 利用(39), (37), (27), (23)和(21), 我们有

$$\begin{aligned}f(xy)&=\psi(\alpha\beta)+\varphi[r(\alpha,\beta)(s_\beta^{-1}rs_\beta)r']\\&=\psi(\beta)+\psi(\alpha)\beta-\bar{\varphi}(\alpha,\beta)+\varphi(r(\alpha,\beta))\\&\quad+\varphi(s_\beta^{-1}rs_\beta)+\varphi(r')\\&=\psi(\beta)+\psi(\alpha)\beta+\varphi(r)\beta+\varphi(r')=f(y)+f(x)\beta\\&=f(y)+f(x)y.\end{aligned}$$

与(24)相比较, 我们看到 $f(x)$ 的确是一个交义同态对应.

MacLane 定理证完.

## §51. 非交换群的扩张

现在我们转来研究非交换群$A$借助群$B$的扩张，将依照 Eilenberg, MacLane[5]. 如在§48 中指出过的，此时可以只讨论由一个给定的同态对应$\theta$伴随的那些扩张，这里$\theta$是群$B$到群$A$的自同构类组成的群$\mathfrak{A}$中的同态对应.

然而并不是$B$到$\mathfrak{A}$中的任意同态对应都可能伴随$A$借助$B$的扩张(参看 Baer[4]中的例子)，下面首先来确定，在什么条件下这是可能的.

设$\theta$是$B$到$\mathfrak{A}$的任意一个同态对应. 在每个自同构类$\theta(\alpha)$，$\alpha\in B$，中选择一个自同构$\varphi_\alpha$. 自同构$\varphi_\alpha\varphi_\beta$和$\varphi_{\alpha\beta}$在一个自同构类内，因此自同构$\varphi_{\alpha\beta}^{-1}\varphi_\alpha\varphi_\beta$是内自同构而且是由群$A$的某个元素$h(\alpha, \beta)$确定的.

约定用$\langle a\rangle$表示群$A$中由元素$a$确定的内自同构. 这样，

$$\varphi_\alpha\varphi_\beta=\varphi_{\alpha\beta}\langle h(\alpha, \beta)\rangle. \tag{40}$$

利用自同构乘法的结合性并注意到对群$A$的任一自同构和此群的任一元素$a$有等式

$$\varphi^{-1}\langle a\rangle\varphi=\langle a\varphi\rangle, \tag{41}$$

考察乘积$\varphi_\alpha\varphi_\beta\varphi_\gamma$，我们可得到等式

$$\langle h(\alpha, \beta\gamma)h(\beta, \gamma)\rangle=\langle h(\alpha\beta, \gamma)\cdot h(\alpha, \beta)\varphi_\gamma\rangle.$$

确定同一个内自同构的元素彼此间相差一个中心内的元素. 因而在群$A$的中心$Z$中存在一个元素$z(\alpha, \beta, \gamma)$，使得

$$h(\alpha, \beta\gamma)h(\beta, \gamma)z(\alpha, \beta, \gamma)=h(\alpha\beta, \gamma)\cdot h(\alpha, \beta)\varphi_\gamma. \tag{42}$$

我们得到了群$B$到阿贝尔群$Z$中的 3-维链. 还可以证明，此链是个圈；然而这个对我们是无关紧要的.

链$z(\alpha, \beta, \gamma)$依赖于自同构$\varphi_\alpha$和元素$h(\alpha, \beta)$的选择. 今证，

群 $C^3(B, Z)$ 关于界的子群 $D^3(B, Z)$ 的陪集且含此链者由同态对应 $\theta$ 本身一意确定.

事实上, 设把元素 $h(\alpha, \beta)$ 换成那确定群 $A$ 的同一个内自同构的元素 $h'(\alpha, \beta)$. 此时在群 $A$ 中心 $Z$ 内存在有元素 $f(\alpha, \beta)$, 使得

$$h'(\alpha, \beta) = h(\alpha, \beta) f(\alpha, \beta).$$

现在依公式(42)来计算相应于元素 $h'(\alpha, \beta)$ 的链 $z'(\alpha, \beta, \gamma)$, 有

$$z'(\alpha, \beta, \gamma) = [f^{-1}(\beta, \gamma) f^{-1}(\alpha, \beta\gamma) f(\alpha\beta, \gamma) \cdot f(\alpha, \beta)\varphi_\gamma] z(\alpha, \beta, \gamma).$$

由(18), 上面方括号中是 2-维链 $f(\alpha, \beta)$ 的界, 因而链 $z$ 和 $z'$ 在关于子群 $D^3(B, Z)$ 的同一个陪集中.

注意到 $f(\alpha, \beta)$ 是群 $B$ 到群 $Z$ 内一个任意的 2-维链, 因此, 作为 $z'(\alpha, \beta, \gamma)$ 可取含链 $z(\alpha, \beta, \gamma)$ 的关于 $D^3(B, Z)$ 之陪集中任意一个链.

另一方面, 设把自同构 $\varphi_\alpha$ 换成属于同一自同构类 $\theta(\alpha)$ 的自同构 $\varphi'_\alpha$. 随之, 在群 $A$ 中有元素 $k_\alpha$, 使得

$$\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha \langle k_\alpha \rangle. \tag{43}$$

这时由(40)和(41)有

$$\varphi'_\alpha \varphi'_\beta = \varphi_{\alpha\beta} \langle h(\alpha, \beta)(k_\alpha \varphi_\beta) k_\beta \rangle = \varphi'_{\alpha\beta} \langle k_{\alpha\beta}^{-1} h(\alpha, \beta)(k_\alpha \varphi_\beta) k_\beta \rangle.$$

因为依上面所证明的, 我们能够随意选择元素 $h'(\alpha, \beta)$, 今设

$$h'(\alpha, \beta) = k_{\alpha\beta}^{-1} h(\alpha, \beta)(k_\alpha \varphi_\beta) k_\beta,$$

由之依(43)有

$$k_{\alpha\beta} h'(\alpha, \beta) = h(\alpha, \beta) k_\beta (k_\alpha \varphi'_\beta). \tag{44}$$

反复利用这最后一个等式, 作为 $\alpha$ 和 $\beta$ 先取元素 $\alpha\beta, \gamma$, 然后就取 $\alpha, \beta$ 本身, 然后取 $\beta, \gamma$, 等等, 并注意到(43), (40)和(42), 我们得到:

$$k_{\alpha\beta\gamma} h'(\alpha\beta, \gamma)[h'(\alpha, \beta)\varphi'_\gamma]$$

$$=h(\alpha\beta,\gamma)k_\gamma[k_{\alpha\beta}h'(\alpha,\beta)]\varphi'_\gamma$$
$$=h(\alpha\beta,\gamma)k_\gamma[h(\alpha,\beta)k_\beta(k_\alpha\varphi'_\beta)]\varphi'_\gamma$$
$$=h(\alpha\beta,\gamma)(h(\alpha,\beta)\varphi_\gamma)k_\gamma[k_\beta(k_\alpha\varphi'_\beta)]\varphi'_\gamma$$
$$=h(\alpha,\beta\gamma)h(\beta,\gamma)z(\alpha,\beta,\gamma)k_\gamma(k_\beta\varphi'_\gamma)(k_\alpha\varphi'_\beta\varphi'_\gamma)$$
$$=h(\alpha,\beta\gamma)k_{\beta\gamma}h'(\beta,\gamma)(k_\alpha\varphi'_\beta\varphi'_\gamma)z(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$=h(\alpha,\beta\gamma)k_{\beta\gamma}(k_\alpha\varphi'_{\beta\gamma})h'(\beta,\gamma)z(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$=k_{\alpha\beta\gamma}h'(\alpha,\beta\gamma)h'(\beta,\gamma)z(\alpha,\beta,\gamma).$$

由之得

$$h'(\alpha\beta,\gamma)[h'(\alpha,\beta)\varphi'_\gamma]=h'(\alpha,\beta\gamma)h'(\beta,\gamma)z(\alpha,\beta,\gamma),$$

亦即，在我们这样选择元素 $h'(\alpha,\beta)$ 时链 $z(\alpha,\beta,\gamma)$ 保持不变．这和上面证过的合在一起就结束了此断语的证明．

*群 $B$ 到群 $\mathfrak{A}$ 的一个同态对应 $\theta$ 能伴随群 $A$ 借助群 $B$ 的某个扩张，当且仅当关于 $D^3(B,Z)$ 的陪集，其中含有由等式(42)确定的链 $z(\alpha,\beta,\gamma)$ 者，与子群 $D^3(B,Z)$ 重合．*

实际上，设存在群 $A$ 借助群 $B$ 的一个扩张 $G$，而同态对应 $\theta$ 伴随它．由关于 $A$ 的陪集选出代表 $g_\alpha$ 后此扩张决定于因子组 $m_{\alpha,\beta}$ 和自同构系 $a\to a^\alpha$，并且满足条件(1)和(2)．这时作为自同构 $\varphi_\alpha$ 可以取自同构 $a\to a^\alpha$，而作为元素 $h(\alpha,\beta)$ 可取因子 $m_{\alpha,\beta}$．由条件(1)可知等式(40)是成立的，而条件(2)说明，在等式(42)中应设

$$z(\alpha,\beta,\gamma)=1 \quad 对所有\ \alpha,\beta,\gamma\in B \tag{45}$$

这样定理的一个方面就被证明了．

反过来，设同态对应 $\theta$ 具有性质：在自同构 $\varphi_\alpha$ 和元素 $h(\alpha,\beta)$ 的某种选择下所得到的链 $z(\alpha,\beta,\gamma)$ 属于子群 $D^3(B,Z)$．上面已经证过，适当变动一下元素 $h(\alpha,\beta)$(如果需要的话)，可以把 $D^3(B,Z)$ 中任意元素取作 $z(\alpha,\beta,\gamma)$，其中也包括链(45)．但是在链(45)这个情形中等式(40)和(42)变为(1)和(2)，亦即存在群 $A$ 借助群 $B$ 的一个扩张，它是由因子组 $h(\alpha,\beta)$ 和自同构系 $\varphi_\alpha$ 给出

的. 显然，这个扩张是由同态对应 $\theta$ 伴随的.

现转来研究群 $A$ 借助群 $B$ 的由同态对应 $\theta$ 伴随的非等价扩张. 首先指出，因为群 $A$ 的任一个自同构都诱导出此群中心 $Z$ 的一个自同构，并且群 $A$ 的属于一个自同构类的自同构诱导出群 $Z$ 相同的自同构，故同态对应 $\theta$ 把群 $B$ 作成 $Z$ 的一个**算子群**. 下面就在这种与给定同态对应 $\theta$ 相联系的意义下来理解群 $Z$ 的算子群 $B$.

设存在有由同态对应 $\theta$ 伴随的，群 $A$ 借助群 $B$ 的一些扩张. 我们来证明，在由同态对应 $\theta$ 伴随的，群 $A$ 借助群 $B$ 的所有非等价扩张以及阿贝尔群 $Z$(群 $A$ 的中心)借助相应于同态对应 $\theta$ 的算子群 $B$ 的所有非等价扩张之间存在着一一对应. 它把现在我们感兴趣的问题归结到前面几节中的结果上去.

设 $G$ 是 $A$ 借助 $B$ 的扩张，它是由同态对应 $\theta$ 伴随者之一，而 $H$ 是 $Z$ 借助算子群 $B$ 的任意一个扩张. 考察一切可能的对

$$(g, h), \quad g \in G, \quad h \in H,$$

要求它们满足条件：陪集 $gA$ 和 $hA$ 相应于群 $B$ 的同一个元素 $\alpha$. 在这样对上的下面运算

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$$

使得所有这些对的集合作成一个群，我们将用 $\tilde{G}$ 表之. 形如 $(a, z)$, $a \in A$, $z \in Z$, 的对组成其中的一个正规子群 $\tilde{A}$，而形如 $(z, z^{-1})$, $z \in Z$, 的对组成正规子群 $N$.

群

$$G' = \tilde{G}/N$$

具有正规子群 $A' = \tilde{A}/N$, 它同构于 $A$，因为在 $\tilde{A}$ 的关于 $N$ 的任意陪集中含有且仅含有一个形如 $(a, 1)$ 的元素. 商群

$$B' = G'/A' \simeq \tilde{G}/\tilde{A}$$

同构于群 $B$, 这是因为，若 $(g, h)$ 是 $\tilde{G}$ 中元素，则陪集 $(g, h)\tilde{A}$ 恰由

一切形如$(g_1, h_1)$，其中$g_1 \in gA$, $h_1 \in hZ$，的元素组成．令陪集$(g, h)\tilde{A}$对应于陪集$gA$和$hZ$都对应的$B$的那个元素$\alpha$，则得$B'$和$B$之间的同构对应．随之，群$G'$是群$A$借助群$B$的一个扩张．

设群$A$的扩张在由关于$A$的陪集中选定代表$g_\alpha$后是由因子组$m_{\alpha,\beta}$和自同构系$a \to a^\alpha$给出的(参看§48)，而群$Z$的扩张$H$在由对$Z$的陪集中选定代表$h_\alpha$后是由因子组$n_{\alpha,\beta}$给出的；在这种情况自同构系已由$B$是算子群而确定了．从上面说过的可得，在$G'$的关于$A$的陪集中作为代表可选择元素

$$g'_\alpha = (g_\alpha, h_\alpha)N. \tag{46}$$

下面来找出，在这样选择代表时确定扩张$G'$的因子组和自同构系．

$$\begin{aligned} g'_\alpha g'_\beta &= (g_\alpha, h_\alpha)N \cdot (g_\beta, h_\beta)N \\ &= (g_\alpha g_\beta, h_\alpha h_\beta)N \\ &= (g_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta}, h_{\alpha\beta} n_{\alpha,\beta})N \\ &= (g_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta})N \cdot (m_{\alpha,\beta}, n_{\alpha,\beta})N. \end{aligned}$$

但元素$(n_{\alpha,\beta}, n_{\alpha,\beta}^{-1})$含在$N$中，因而

$$(m_{\alpha,\beta}, n_{\alpha,\beta})N = (m_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}, 1)N,$$

它对应于群$A$的元素$m_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}$．这样，所求因子组是由元素

$$m'_{\alpha,\beta} = m_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta} \tag{47}$$

组成．另一方面，用元素$g'_\alpha$去变形群$A$的元素$a$，也就是陪集$(a, 1)N$，我们便得

$$(g_\alpha^{-1}, h_\alpha^{-1})N \cdot (a, 1)N \cdot (g_\alpha, h_\alpha)N = (a^\alpha, 1)N = a^\alpha. \tag{48}$$

随之，由扩张$G'$的元素$g'_\alpha$在群$A$中所产生的自同构与由扩张$G$的元素$g_\alpha$在群$A$中所产生的自同构相重合．由之特别可得出，扩张$G'$和扩张$G$伴随以相同的同态对应$\theta$．

因为群$A$的扩张$G'$由群$A$的扩张$G$和群$Z$的扩张$H$的选择完全决定，我们对它引入下面的符号

$$G' = (G, H). \tag{49}$$

认定扩张 $G$ 是固定的，我们来证明，*群 $A$ 借助群 $B$ 且由同态对应 $\theta$ 伴随的任意扩张都等价于在 $H$ 的一个适当选择下形如 $(G, H)$ 的扩张，而 $H$ 是 $Z$ 借助算子群 $B$ 的扩张.*

事实上，因为扩张 $G'$ 由同态对应 $\theta$ 伴随，故我们可以选择关于 $A$ 的陪集的代表 $g'_\alpha$，使得这些代表在群 $A$ 中产生的自同构就是扩张 $G$ 的元素 $g_\alpha$ 所产生的自同构 $a \to a^\alpha$. 设在这样选择代表时对于 $G'$ 的因子组是由元素 $m'_{\alpha,\beta}$ 组成的. 由(1)得，元素 $m_{\alpha,\beta}$ 和 $m'_{\alpha,\beta}$ 产生群 $A$ 的同一个内自同构，即是它们只相差一个属于中心的元素，

$$m'_{\alpha,\beta} = m_{\alpha,\beta} n_{\alpha,\beta}, \quad n_{\alpha,\beta} \in Z. \tag{50}$$

利用对于元素 $m'_{\alpha,\beta}$ 的等式(2)并注意到元素 $n_{\alpha,\beta}$ 在群 $A$ 的中心内，而元素 $m_{\alpha,\beta}$ 也满足等式(2)，我们可得，元素 $n_{\alpha,\beta}$ 也满足这个等式(2)，即是对于群 $Z$ 借助算子群 $B$ 的某个扩张的因子组. 比较(50)和(47)并注意到等式(48)以及相应于扩张 $G$ 和 $G'$ 的自同构系是相同的，我们得到，扩张 $G'$ 和 $(G, H)$ 是等价的.

为了完成定理的证明剩下要证的是：*若 $H_1$ 和 $H_2$ 是群 $Z$ 借助算子群 $B$ 的两个扩张，则扩张*

$$G'_1 = (G, H_1) \quad \text{和} \quad G'_2 = (G, H_2)$$

*是等价的当且仅当扩张 $H_1$ 和 $H_2$ 是等价的.*

事实上，设 $\varphi$ 是 $H_1$ 到 $H_2$ 上的等价映射. 此时

$$(g, h_1) \to (g, h_1\varphi) = (g, h_2)$$

是群 $\tilde{G}_1$ 到群 $\tilde{G}_2$ 上的同构对应，且在此对应下子群 $\tilde{A}$，因而还有 $N$，恒等地映到自身上，由之易推出扩张 $G'_1$ 和 $G'_2$ 的等价性.

反之，设给定扩张 $G'_1$ 到扩张 $G'_2$ 上的一个等价映射 $\psi$. 设扩张 $G$ 和前面一样是由因子组 $m_{\alpha,\beta}$ 和自同构系 $a \to a^\alpha$ 给出的，而扩张 $H_i$, $i=1, 2$, 是由因子组 $n^{(i)}_{\alpha,\beta}$ 给出的. 这时扩张 $G'_i$，$i=1, 2$, 在按照(46)选定代表 $g'_{i\alpha}$ 后，如我们所知，是由同一个自同构系 $a \to a^\alpha$，

以及依(47)，和因子组 $m_{\alpha,\beta}n_{\alpha,\beta}^{(i)}$给出的.

因为同构对应 $\psi$ 是等价映射，故元素 $g'_{1\alpha}\psi$ 和 $g'_{2\alpha}$ 是在关于 $A$ 的同一个陪集中，即是

$$g'_{1\alpha}\psi = g'_{2\alpha}b_\alpha \qquad b_\alpha \in A. \tag{51}$$

我们知道，对于任意 $a\in A$

$$ag'_{1\alpha} = g'_{1\alpha}a^\alpha.$$

把映射 $\psi$ 作用到此等式，并注意到(51)，得

$$ag'_{2\alpha}b_\alpha = g'_{2\alpha}b_\alpha a^\alpha.$$

但

$$ag'_{2\alpha} = g'_{2\alpha}a^\alpha,$$

因而

$$g'_{2\alpha}a^\alpha b_\alpha = g'_{2\alpha}b_\alpha a^\alpha,$$

由之有

$$a^\alpha b_\alpha = b_\alpha a^\alpha.$$

但是元素 $a^\alpha$ 随 $a$ 一同历遍整个 $A$，故 $b_\alpha$ 在中心中，

$$b_\alpha \in Z \tag{52}$$

其次，我们知道

$$g'_{1\alpha}g'_{1\beta} = g'_{1,\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}n_{\alpha,\beta}^{(1)}.$$

对此等式应用映射 $\psi$ 并注意到(51)，得

$$g'_{2\alpha}b_\alpha g'_{2\beta}b_\beta = g'_{2,\alpha\beta}b_{\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}n_{\alpha,\beta}^{(1)}.$$

但是

$$g'_{2\alpha}g'_{2\beta} = g'_{2,\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}n_{\alpha,\beta}^{(2)},$$

因而，注意到 $b_{\alpha\beta}\in Z$ 便得

$$b_\alpha^\beta b_\beta = b_{\alpha\beta}n_{\alpha,\beta}^{(2)-1}n_{\alpha,\beta}^{(1)}.$$

如果在群 $Z$ 中改用加的记法，我们便得，圈 $n_{\alpha,\beta}^{(1)}$ 和 $n_{\alpha,\beta}^{(2)}$ 的差是一维链 $b_\alpha$ 的界，而由 §49 我们知道，这一事实就给出扩张 $H_1$ 和 $H_2$ 的等价性.

定理证完.

## §52. 一些特殊情形

在前面几节中所得到的关于群$A$借助群$B$非等价扩张的研究，在对群$A$和$B$或者对所考察的扩张加上某些特殊限制时，可以得到进一步简化.

中心扩张. 阿贝尔群$A$借助群$B$的扩张$G$叫作中心扩张，如果$A$在$G$的中心中. 这等价于，在§48的意义下，对应此扩张的自同构$a \to a^{\alpha}$全都是恒等自同构. 换言之(参看§49的开始部分)，阿贝尔群$A$借助群$B$的中心扩张就是用下面方式得到的扩张：把$B$看作$A$的平凡作用的算子群，亦即，对所有$a \in A$和所有$\alpha \in B$有

$$a\alpha = a. \tag{53}$$

因此，可以谈论中心扩张的群.

对这一情形应用§50中的定理，此时认定把群$B$表成形式

$$B = S/R,$$

其中$S$是自由群. 等式(21)现在就变成

$$ax = a, \quad a \in A, \quad x \in S.$$

因而依(23)群$R$到群$A$的带算子的同态对应$\varphi$由等式

$$\varphi(x^{-1}rx) = \varphi(r), \quad r \in R, \quad x \in S$$

确定，随之，它把群$R$中的所有在$S$内共轭的元素映到同一个元素上去，即是把形如$r^{-1}x^{-1}rx$的任意换位子映入零. 最后，(24)说明，$S$到$A$中的交义同态对应就是通常的同态对应. 因而有下面定理.

阿贝尔群$A$借助群$B$的中心扩张的群，其中$B$表成自由群$S$的商群$S/R$形式，同构于商群$Q/T$，其中$Q$是$R$到$A$中的所有把相互换位子群$[R, S]$映入零的同态对应组成的群，而$T$是那些由$S$到$A$内的同态对应诱导出来的$R$到$A$中的同态对应组成的子群.

与中心扩张相联系的还可参看 Baer[32].

阿贝尔扩张. 阿贝尔群 $A$ 借助也是阿贝尔群 $B$ 的任意中心扩张不都是阿贝尔的，这可由亚阿贝尔群的存在而看出. 下面来说明，在 $A$ 借助 $B$ 的所有中心扩张的群中如何分划出阿贝尔扩张来.

我们知道 $A$ 借助 $B$ 的中心扩张由恒等自同构和因子组 $m_{\alpha,\beta}$ 来确定. 如果群 $B$ 是阿贝尔的，则由(3)得，**扩张 $G$ 是阿贝尔的当且仅当因子组 $m_{\alpha,\beta}$ 是对称的，即对所有 $B$ 中的元素 $\alpha, \beta$,**

$$m_{\alpha,\beta}=m_{\beta,\alpha}.$$

显然，对称因子组作成所有因子组的群 $F(A, B)$ 中的一个子群(参看 §49 的开头). 另一方面，由于(53)和群 $B$ 的交换性，等式(9)说明在我们这个情形子群 $T(A, B)$ 是由对称因子组组成的. 由于这一点，**群 $A$ 借助阿贝尔群 $B$ 的非等价阿贝尔扩张在 $A$ 借助 $B$ 的所有中心扩张的群中作成一个子群.**

利用已得到的关于中心扩张的研究，我们来找出这个阿贝尔扩张群. 把阿贝尔群 $B$ 表成自由阿贝尔群 $S_0$ 的商群 $S_0/R_0$ 形式. 取自由非交换群 $S$，使它和 $S_0$ 有相同的自由生成元. 此时

$$B=S/R,$$

且若 $S'$ 表群 $S$ 的换位子群，则 $S'\subseteq R$ 以及

$$S/S'=S_0,\quad R/S'=R_0. \tag{54}$$

如 §50 定理证明的开始部分所示，我们需要划分出群 $Q(R, A; S)$ 中这样的元素，它们被映射(28)映入具有性质

$$\bar{\varphi}(\alpha, \beta)=\bar{\varphi}(\beta, \alpha)$$

的圈 $\bar{\varphi}(\alpha, \beta)$. 此处我们提醒一下，这时群 $Q(R, A; S)$ 是由 $R$ 到 $A$ 之同态对应组成的，这些同态对应把相互换位子群 $[R, S]$ 映入零.

如果在 $S$ 中依照(25)选定关于 $R$ 的陪集的代表 $s_\alpha$，则有等式(26)，因而也有等式

$$s_\beta s_\alpha = s_{\beta\alpha} r(\beta, \alpha).$$

因为现在有 $\alpha\beta=\beta\alpha$, 故

$$s_\alpha^{-1} s_\beta^{-1} s_\alpha s_\beta = r^{-1}(\beta, \alpha) r(\alpha, \beta).$$

设 $\varphi$ 是 $Q(R, A; S)$ 中任一元素. 此时由(27)及群 $A$ 的交换性, 并把群 $A$ 之运算记作加法, 有

$$\varphi(s_\alpha^{-1} s_\beta^{-1} s_\alpha s_\beta) = \bar{\varphi}(\alpha, \beta) - \bar{\varphi}(\beta, \alpha).$$

因此, 等式(55)成立当且仅当同态对应 $\varphi$ 把形如 $s_\alpha^{-1} s_\beta^{-1} s_\alpha s_\beta$ 的任意换位子映成零. 有此性质的同态对应 $\varphi$ 在群 $Q(R, A; S)$ 中组成一个子群, 将用 $\bar{Q}(R, A; S)$ 表之.

若是 $\varphi$ 属于 $\bar{Q}(R, A; S)$, 则它还把 $S$ 中任意一般的换位子 $x^{-1}y^{-1}xy$, 亦即整个换位子群 $S'$, 映成零. 这是因为, 若

$$x = s_\alpha r_1, \quad y = s_\beta r_2, \quad r_1, r_2 \in R,$$

则

$$\begin{aligned} x^{-1}y^{-1}xy &= r_1^{-1} s_\alpha^{-1} r_2^{-1} s_\beta^{-1} s_\alpha r_1 s_\beta r_2 \\ &= r_1^{-1}(s_\alpha^{-1} r_2^{-1} s_\alpha)(s_\alpha^{-1} s_\beta^{-1} s_\alpha s_\beta)(s_\beta^{-1} r_1 s_\beta) r_2, \end{aligned}$$

注意到 $\varphi$ 把 $[R, S]$ 映成零且依假设还把 $s_\alpha^{-1} s_\beta^{-1} s_\alpha s_\beta$ 也映成零, 我们有

$$\varphi(x^{-1}y^{-1}xy) = -\varphi(r_1) - \varphi(r_2) + \varphi(r_1) + \varphi(r_2) = 0.$$

因此, 群 $\bar{Q}(R, A; S)$ 是由把子群 $S'$ 映成零的所有 $R$ 到 $A$ 的同态对应组成的. 另一方面, 显然, 子群 $Q'(R, A; S)$ 中任意元素把整个换位子群 $S'$ 映为零. 这样, $A$ 借助 $B$ 的阿贝尔扩张的群同构于群 $\bar{Q}(R, A; S)$ 关于子群 $Q'(R, A; S)$ 的商群, 再利用等式(54), 我们得下面的最终结果(Eilenberg, MacLane[1]).

**当把阿贝尔群 $B$ 表成自由阿贝尔群 $S_0$ 的商群 $S_0/R_0$ 的形式时, 阿贝尔群 $A$ 借助 $B$ 的阿贝尔扩张的群同构于商群 $Q/T$, 其中 $Q$ 是 $R_0$ 到 $A$ 的所有同态对应的群而 $T$ 是由 $S_0$ 到 $A$ 的同态对应诱导出来的 $Q$ 中那些同态对应组成的子群.**

*无中心群的扩张*. 设$A$是无中心的群, 即$Z=E$. 若$\theta$是群$B$到群$A$自同构类的群$\mathfrak{A}$内随便一个同态对应, 则如§51中定理所示, 此同态对应永远伴随$A$借助$B$的那么一个扩张, 这是因为由$Z=E$可得链$z(\alpha, \beta, \gamma)$只能是零.

另一方面, 单位群借助$B$的扩张只有唯一的一个, 即$B$本身, 因而依照§51, $A$借助$B$的扩张中只有一个由给定的同态对应$\theta$伴随. 我们得到下面结果.

*无中心的群$A$借助群$B$的非等价扩张与群$B$到群$A$自同构类的群$\mathfrak{A}$内的不同同态对应之间存在着一个相互单值对应.*

*可裂扩张*. 设群$A$借助群$B$的扩张$G$有如下性质: 在陪集$gA$中可以选择代表$g_\alpha$, $\alpha\in B$, 使得满足条件

$$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta}$$

亦即

$$m_{\alpha,\beta}=1.$$

这样, 代表$g_\alpha$组成群$G$中的一个子群$B'$, 它同构于$B$, 并且$A$和$B'$合起来生成整个群$G$而它们的交是$E$. 这样的扩张叫作*可裂扩张*, 也说成是$G$为正规子群$A$和子群$B'$的*半直积*. 显然, 群$A$和$B$的直积是它们的半直积.

*阿贝尔群$A$借助群$B$的非等价可裂扩张与群$B$到群$A$的自同构群内的不同同态对应之间存在着一个相互单值对应.*

事实上, 在§49中曾指出过, 若考察具有算子群$B$的阿贝尔群$A$, 则存在有由因子组$m_{\alpha,\beta}=1$确定的扩张.

*任意群$A$借助自由群$B$的任意扩张都是可裂的.*

事实上, 从对应于群$B$中自由生成元的, $G$关于$A$的陪集中任意选出代表, 并以自然方式选定所有其余陪集中的代表, 我们便得一子群$B'$, 而$G$是它和$A$的半直积.

# 第四篇 可解群与幂零群

## 第十三章 有限条件，Sylow 子群和相近的问题

### §53. 有限条件

起初对有限群证明的许多定理能够推广到更广的群类上去，这时常对所研究的群加上一些这样或那样的限制，它们较之要求元素个数有限弱一些．我们想在这里综合地介绍这些*有限条件*，但只局限于经常用到的．

有限条件之一，并且是很广泛的一个，是要求*群的周期性*．有时常不得不将它换成更强的限制——局部有限性的条件：一个群叫作局部有限的，如果它的任意有限子集生成有限子群．

局部有限群的周期性是显然的，而关于这两个群类是否重合的问题，是在 §38 中指出过的 Burnside 问题的另一种表叙[1]．在以下的一些章中读者将遇到一些定理，其中在各样的附加条件下证明周期群的局部有限性；对于阿贝尔群这两种条件显然是一致的．（参看补充 16.5）

后面将用到下述定理（Шмидт[7]）．

*局部有限群 $A$ 借助局部有限群 $B$ 的扩张 $G$ 本身也是局部有限的．*

事实上，群 $G$ 的周期性是显然的．其次，设在 $G$ 中取一由元素

1）前面已经提到，在第三版的准备期间此问题已经得到解决．

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的有限集$M$. 由群$B$的局部有限性便得商群$H/A$的有限性，其中

$$H=\{A, M\}.$$

将认定，在$H$关于$A$的每一陪集中至少含有$M$中的一个元素；为此可能需要对集$M$添加有限个元素. 任意乘积$x_ix_j$属于$H$关于$A$的一个陪集中，因此它至少有一种方法可表成$M$中一个元素和$A$中一个元素的乘积形式. 对每一足码对$i, j$选定一个这样的表示

$$x_ix_j=x_ka_{ij}, \quad a_{ij}\in A.$$

由群$G$的周期性，子群$\{M\}$的任一元素都可表成指数为$+1$的$x_i$的乘积形式，因而可表成$M$中的一个元素和一些形如$a_{ij}$的元素之积相乘的形式，也就是$M$中一个元素和所有元素$a_{ij}$生成的子群中一个元素相乘的形式. 但是由群$A$的局部有限性以及$a_{ij}$的个数的有限性，所有$a_{ij}$生成的子群是有限的. 由之便得子群$\{M\}$的有限性，即证得群$G$的局部有限性.

较之局部有限性窄得多的有*局部正规条件*：一个群$G$叫作局部正规的，如果它的任意有限子集含于群$G$的某个有限正规子群中. 在 §55 中我们讨论这种群.（参看补充 16.7）

下面这类群是和局部正规群很接近的：所有共轭元素系都是有限的那些群，将简称作*具有限系的群*. 属于这种类型群的不仅是所有有限群，还有所有阿贝尔群. 我们有下面的定理：

*任意具有限系的周期群是局部正规的，反之也对.*

显然，局部正规群是周期群，且其每一元素都属于一个有限共轭元素系. 定理的正命题可由下面的 Дицман 引理得出（见 Дицман[1]）.

*在任意群$G$中给定一有限不变集$\mathfrak{M}$且知$\mathfrak{M}$中每一元素都是周期的，则$\mathfrak{M}$生成的子群是有限群.*

事实上，设$\mathfrak{M}$由$k$个元素组成，设$m$是$\mathfrak{M}$中所有元素的阶的

最小公倍而 $A=\{\mathfrak{M}\}$. $A$ 中任意元素可写成 $\mathfrak{M}$ 中元素乘积形式. 为了证明引理我们只需指出, 在 $A$ 中每一元素 $a$ 的这类表示中可找到其因子个数不超过 $k(m-1)$者. 设给定 $a$ 的一个表示式:

$$a=a_1a_2\cdots a_s,\quad a_i\in\mathfrak{M},\quad i=1,2,\cdots,s, \tag{1}$$

并设 $s>k(m-1)$. 此时在 $\mathfrak{M}$ 中至少有一个元素, 例如说是 $a_0$, 在表示式(1)中至少出现 $m$ 次. 若 $a_i$ 是记法(1)中第一个等于 $a_0$ 的元素, 则令 $a_0^{-1}a_ja_0=a'_j$, 便有

$$a=a_0a'_1\cdots a'_{i-1}a_{i+1}\cdots a_s,$$

且 $a'_j\in\mathfrak{M}$, 因为 $\mathfrak{M}$ 是不变集. 应用这个方法去处理 $a_{i+1},\cdots,a_s$ 中第一个等于 $a_0$ 者, 之后再去处理剩下元素中有此性质者, 这样继续作下去, 有限步之后便得用 $\mathfrak{M}$ 中元素表示 $a$ 的一个写法, 它具有形式

$$a=a_0^m\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_{s-m},$$

由 $a_0^m=1$ 便得一只含 $s-m$ 个因子的表示式. 这样子群 $A$ 的有限性证完.

为了由 Дицман 引理得出要证的定理, 剩下来只需指出, 不变集生成的子群是正规子群而具有限系的群的任意有限子集必含在一个有限不变集中. (参看补充 17.6)

下面我们提一下*层有限性条件*. 一个群叫作层有限的, 如果其中具同一阶的元素只有有限多个. 层有限群不可能有无限阶元素, 因为若有的话, 显然它们必是无限多个, 随之层有限群是周期群. 另一方面, 在这样群中任一元素只能有有限个共轭元素. 应用上面定理, 我们有: *任意层有限群是局部正规的.*

在 Черников[12] 中对层有限群给了几乎完全的刻划. 这样群的某些性质在 Baer[40]中也有讨论. (参看补充 17.7)

还有一系列有限条件是涉及所讨论群的子群格的. 其中最重要的是关于子群的极小条件, 即是, 子群降链的中断条件. 任意具

有这一性质的群都是周期群, 因为无限循环群不满足极小条件. 然而, 目前不清楚的是: *对子群有极小条件的群是局部有限的吗? 是可数群吗?*

*若在群 $G$ 中, 正规子群 $N$ 和商群 $G/N$ 都是有极小条件群, 则群 $G$ 也有极小条件.*

为了证明它, 设在 $G$ 中给定子群 $A$ 和 $B$, 且 $A\subseteq B$, $A\cap N=B\cap N$ 以及 $AN=BN$. 若 $b$ 是 $B$ 中任意元素, 则由 $b\in AN$ 将有 $b=ax$, 其中 $a\in A, x\in N$. 由此有 $x=a^{-1}b\in B$, 即 $x\in(B\cap N)$, 因而 $x\in(A\cap N)\subseteq A$. 这就证明了, $b=ax\in A$, 即 $A=B$. 这样, 若群 $G$ 中有无限递降子群链, 则群 $N$ 和 $G/N$ 中至少有一个, 其中也有这样的链: 若是已知一子群链

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots,$$

则或者在这些子群与 $N$ 之交组成的链中, 或者群 $G/N$ 中相应于这些子群与 $N$ 的乘积的那些子群组成的链中, 必包含无限多个不相同的项.

由此定理可得: *两个因而有限多个有极小条件的群的直积本身也满足极小条件.* 容易明白, 有极小条件的群之任意子群是不可能分解成无限多个群的直积的. (参看补充 17.2)

*任意有极小条件的阿贝尔群是有限阿贝尔群和有限个 $p^\infty$ 型群的直积, 其中这些素数 $p$ 中可以有相同的. 反之, 任意这样的直积都满足极小条件.*

此定理的第二个命题可由上面关于直积的讨论得到, 因为 $p^\infty$ 型群的所有真子群都是有限的(参看 §7), 因而这群满足极小条件. 为了证明第一个结论, 我们把极小条件阿贝尔群, 作为周期阿贝尔群, 分解成有限个准素群的直积. 在 §25 中已证过, 准素阿贝尔群或者可分解成有限循环群和 $p^\infty$ 型群的直积, 或者根本就不能分解成不可分解群的直积. 即是它的任一直分解中至少包含一可

分解的直因子. 对于极小条件群第二种情况不可能出现, 因为它将引出一个无限递降子群链, 因此只能是第一种情形, 并且直因子的个数应是有限的.

由此定理可得

*任意极小条件阿贝尔群是可数的.*

对于上面我们得到的极小条件准素阿贝尔群$G$的直分解, 下面这个关于同构的定理成立.

*若*

$$G=A_1\times A_2\times\cdots\times A_k\times H=A_1'\times A_2'\times\cdots\times A_l'\times H',$$

*其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k, A_1', A_2', \cdots, A_l'$ 是 $p^\infty$ 型群而$H$和$H'$是有限群, 则 $k=l$ 且 $H\simeq H'$.*

实际上, 考察第一个分解, 易见子群 $B=A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$ 是$G$中所有具下面性质的元素 $a$ 组成的: 在$G$中方程 $x^{p^n}=a$ 对任意 $n$ 都有解. 因而这个子群与所选用的分解无关, 即有

$$B=A_1\times A_2\times\cdots\times A_k=A_1'\times A_2'\times\cdots\times A_l'.$$

在此子群中阶不大于$p$的元素个数为$p^k$. 由之便得数$k$也和分解的选择无关, 即 $k=l$. 最后, 子群$H$和$H'$都同构于商群$G/B$, 随之它们是彼此同构的.

若$G$是任意极小条件阿贝尔群, 则在它的上述直分解中 $p^\infty$ 型直因子($p$是一固定素数)的个数与分解的选择无关, 这一点是我们刚证过的. 将称这个数为群$G$的 $p$-重.

*若$G$是极小条件阿贝尔群而$N$是它的子群, 则群$G$的$p$-重等于群$N$和$G/N$的$p$-重的和.*

易见, 子群$N$, 与群$G$一起, 分解成关于不同素数的准素群的直积. 这使我们在证明定理时可假设群$G$本身是准素的. 设$k$和$l$顺序为群$G$和群$N$的$p$-重, 而设 $N=B\times H$, 其中$B$是$l$个$p^\infty$型群的直积, 而$H$是有限群. 当从群$G$中分离出与$p^\infty$型群同构的直

因子时，我们可以从出现在 $B$ 中的这些因子开始. 由此便得 $B$ 可作为群 $G$ 的直因子，而因此群 $G/B$ 的 $p$- 重等于 $k-l$. 为了得到群 $G/N$, 只需取群 $G/B$ 关于某一有限子群的商群, 读者容易证明, 这样作不会影响 $p$-重: 只需考虑 $H$ 是循环群的情形并请注意到, $p^\infty$ 型群关于其循环子群的商群仍是 $p^\infty$ 型群.

有时还使用对于子群的极大条件，即是递增子群链的中断条件. 这里要提一下，这个条件等价于要求群本身以及它的所有子群具有有限个生成元. 事实上，设在群 $G$ 中所有递增子群链都必中断而 $A$ 是 $G$ 的子群. 在 $A$ 中取元素 $a_1$ 而用 $A_1$ 表示它生成的循环群. 设在 $A$ 中已选定有限生成的子群 $A_n$, 若是它还异于 $A$. 则在 $A$ 内取一不在 $A_n$ 中的元素 $a_{n+1}$ 而设 $A_{n+1}=\{A_n, a_{n+1}\}$. 递增子群链 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$ 应当中断，即是关于某一 $n$ 有 $A_n=A$. 由之得子群 $A$ 有有限个生成元. 反之，若在群 $G$ 中有无限递增子群 $B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots$, 则由 §7 我们知道, 此链之并不可能具有有限生成元系. (参看补充 17.5)

与关于子群的极小和极大条件相平行的可引入较之弱了许多的关于正规子群的极小和极大条件. 对正规子群有极小条件的群在 Baer[41]中被讨论了. 对于某些特殊类型的群由对正规子群的极小条件可推得对子群的极小条件——参看 Jennings[1], Адо [3], Черников[11], Глушков[4]. (参看补充 17.3)

群的生成元个数的有限性也可以看作是一个有限性条件; 在第十章中曾讨论过具有这样性质的群. 还想提出共轭元素系的个数的有限性条件. 这类群可能有很复杂的结构, 这可由下面定理(Higman 和 Neumann[1])看出.

任意无扭群 $G$ 可嵌入到无扭群内，其中所有异于单位元的元素彼此是共轭的, 即是可嵌入到只有两个共轭元素系的群中.

使用 §38 中的引理 2, 可把群 $G$ 嵌入到群 $G'$ 中，这里的 $G'$ 是

由群 $G$ 以及所有元素 $h_{a,b}$ 生成的，其中 $a, b$ 取遍 $G$ 中异于 1 的元素组成的所有可能的有序对，且有

$$h_{a,b}^{-1} a h_{a,b} = b.$$

在群 $G'$ 中群 $G$ 的所有异于 1 的元素是彼此共轭的. 群 $G'$ 仍是无扭群，这由 §38 中引理 1 的证明可知. 对 $G'$ 使用同样的构成方法并继续作下去，我们就得到无扭群的递增列

$$G \subset G' \subset G'' \subset \cdots \subset G^{(n)} \subset \cdots,$$

它之并便满足定理的要求.（参看补充 17.8）

最后，我们提一下秩的有限性条件，它是在 Мальцев[4] 中引进的.

说一个群 $G$ 有个有限的一般秩 $r$，如果 $r$ 是具有下面性质的数中的最小者：$G$ 的任意有限子集含在一个具有不超过 $r$ 个生成元的子群中.

说一个群 $G$ 有个有限的特殊秩 $r$，如果 $r$ 是具有下面性质的数中的最小者：$G$ 的任意有限子集所生成的子群具有不超过 $r$ 个生成元.

显然，群的一般秩小于或等于它的特殊秩. 可数对称群（参看 §4）是有有限一般秩的群的例子，它的一般秩等于 2，这是因为此群的任意有限子集含在有限对称群中，亦即含在有两个生成元的子群中，但是它的特殊秩却是无限的. 事实上，可数对称群包含任意有限群，但是，有限群的生成元的最小个数在总体上并不是有界的.

对于阿贝尔群一般秩和特殊秩是相等的，因为有 $n$ 个生成元的阿贝尔群的任意子群有不多于 $n$ 个生成元. 对于无扭阿贝尔群这些秩等于 §19 意义下的秩.

## § 54. Sylow 子群. $p$-群的中心

有限群有许多定理，它们由群的阶的算术性质引申出关于群的一些深入的性质. 其中最重要者之一就是下面的 Sylow 第一定理:

*若有限群 $G$ 的阶 $n$ 能被素数 $p$ 的 $k$ 次幂整除，则 $G$ 有阶为 $p^k$ 的子群.*

关于 $n$ 作归纳法来证此定理. 当 $n=1$ 时它显然是对的. 除此外我们假设 $k>0$.

若群 $G$ 的中心的阶被 $p$ 整除，则只要用一下关于有限阿贝尔群的基本定理(§20)便知，中心含有 $p$ 阶元素 $a$，且循环群 $\{a\}$ 将是 $G$ 中的正规子群. 商群 $G/\{a\}$ 的阶是 $n/p$，后者被 $p^{k-1}$ 整除，因此依归纳法假设，此商群有 $p^{k-1}$ 阶子群. 这个子群在群 $G$ 内对应的子群，其阶为 $p^k$.

若中心的阶不被 $p$ 整除，则依下面方法去讨论：把 $G$ 中不属于中心的元素分组成不同的共轭元素系而这些系中元素个数记作 $l_1, l_2, \cdots, l_s$. 此时，若 $c$ 是中心的阶，$c \geqslant 1$，则有

$$n=c+\sum_{i=1}^{s} l_i.$$

因为 $n$ 被 $p$ 整除，但 $(c,p)=1$，故至少有一个 $l_i$ 也和 $p$ 是互素的. 由之得，在 $G$ 中存在有真子群 $N$ (该共轭元素系中一个元素的正规化子)，其指数与 $p$ 互素，随之其阶被 $p^k$ 整除. 依归纳假设 $N$ 有 $p^k$ 阶子群. 定理证完.

这个定理的特例(当 $k=1$)是 Cauchy 定理:

*若有限群 $G$ 的阶被素数 $p$ 整除，则 $G$ 有 $p$ 阶元素.*

另一方面，若 $p^m$ 是能整除有限群 $G$ 的阶 $n$ 的素数 $p$ 的最大幂，则依 Sylow 第一定理知，群 $G$ 有 $p^m$ 阶子群. 这些子群叫作有

限群 $G$ 的 Sylow $p$-子群.

有限群的 Sylow 子群具有一系列重要性质，用适当的方式把 Sylow 子群的概念推广到任意群(即不一定是有限群)上去，我们可以直接对任意群来证明这些性质 (Дицман, Курош 和 Узков [1]).

设 $\Pi$ 是素数的一个非空集，有限的或者无限的. 周期群 $G$ 叫作 $\Pi$-群，如果群 $G$ 中任一元素的阶的所有素因数都属于 $\Pi$. 若集 $\Pi$ 只由一个素数组成，则我们就得到 $p$-群的概念：这就是其所有元素的阶都是数 $p$ 之幂的群. 在阿贝尔群情况这个概念与关于 $p$ 的准素群的概念一致.

*有限群 $G$ 是 $p$-群当且仅当它的阶是数 $p$ 的幂.*

这是因为，若群 $G$ 的阶等于 $p^n$，则依 Lagrange 定理，$G$ 中任意元的阶都是数 $p^n$ 的因数，即是 $p$ 的幂. 若是群 $G$ 的阶被异于 $p$ 的素数 $q$ 整除，则依 Cauchy 定理，$G$ 有 $q$ 阶元素，因而不是 $p$-群.

一个 $\Pi$-群，若它是一个较大群 $G$ 的子群，而这个群 $G$ 已不一定是周期群，则我们将称之为 $G$ 的 *$\Pi$-子群*. 它的特殊情况是 *$p$-子群*的概念.

群 $G$ 的 $\Pi$-子群 $Q$ 叫作群 $G$ 的 *Sylow $\Pi$-子群*，若是它不被包含在 $G$ 的任意较大的 $\Pi$-子群中.

特别，任意群 $G$ 的 Sylow $p$-子群是这样的 $p$-子群，它不含于群 $G$ 的任何一个较大的 $p$-子群中. 对于有限群来说，这个概念和在上面 Sylow 第一定理中用同样的名称引入的概念是一致的，这一点将在本节结尾时来证明.

下面将认定集 $\Pi$ 是任意的，但是固定的.

*任意群都有 Sylow $\Pi$-子群.*

事实上，若此群不含异于 $E$ 的 $\Pi$-子群，则 $E$ 就是其 Sylow $\Pi$-子群. 若是群 $G$ 含有非平凡的 $\Pi$-子群，则取其中之一，记作 $Q_1$.

假设在 $G$ 中已选定一良序递增 $\Pi$-子群列

$$Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \subset Q_\alpha \subset \cdots,$$

其中 $\alpha$ 取遍小于某一 $\beta$ 的所有序数. 若数 $\beta-1$ 存在而子群 $Q_{\beta-1}$ 还不是 Sylow $\Pi$-子群，则它含于某一较大的 $\Pi$-子群中，将它记作 $Q_\beta$. 若是 $\beta$ 为极限序数，则把子群 $Q_\alpha$，$\alpha<\beta$ 的升列之并取作 $Q_\beta$，它显然仍是 $\Pi$-群. 这个构造子群升列的过程必将停止在某一序数上，其势不超过群 $G$ 的势. 这就证明了 $G$ 中 Sylow $\Pi$-子群的存在性.

与此同时我们还证明了，群 $G$ 的任意 $\Pi$-子群包含在某一 Sylow $\Pi$-子群中. 这是因为我们在推导上面的证明时可以取 $Q_1$ 为任意的 $\Pi$-子群.

若 $H$ 是群 $G$ 的子群，则群 $H$ 的不同 Sylow $\Pi$-子群 $Q_1$ 和 $Q_2$ 不能包含在群 $G$ 的一个 $\Pi$-子群中. 这是因为，不然的话它们该也含于此子群与 $H$ 的交中，而此交仍是 $\Pi$-子群. 同样，下面这个结果是显然的：若群 $G$ 是群 $H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$ 组成的升列之并且若在群 $H_n$ 中选定一 Sylow $\Pi$-子群 $Q_n$，$n=1, 2, \cdots$，而当 $n<s$ 时 $Q_n \subseteq Q_s$，则群 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots$ 组成的升列之并必是群 $G$ 的 Sylow $\Pi$-子群. 然而应当提出的是，一般言，并不是群 $G$ 的任意 Sylow $\Pi$-子群(在给定的列 $H_n$ 的条件下)都能用这种方式得到.

现在我们转到 Sylow 子群的正规化子问题，它在以后的讨论中起重要的作用. 设在群 $G$ 中给定两个 $\Pi$-子群 $A$ 和 $B$，其中 $A$ 是 $G$ 中的正规子群. 积 $AB$ 中任一元素具有形状 $ab$，$a\in A$，$b\in B$. 若 $b$ 的阶为 $n$，则

$$(ab)^n = \bar{a}b^n = \bar{a}, \qquad \bar{a}\in A.$$

其次，若 $\bar{a}$ 有阶 $m$，则

$$(ab)^{nm} = \bar{a}^m = 1,$$

由之得子群 $AB$ 也是 $\Pi$-子群. 如果 $B$ 还是群 $G$ 的 Sylow $\Pi$-子

群, 则 $AB=B$, 即 $A\subseteq B$. 这就证明了, 群 $G$ 的一个 $\Pi$-子群, 若它还是群 $G$ 的正规子群, 必含在 $G$ 的任意 Sylow $\Pi$-子群中. 若是所考察的这个正规子群本身是 Sylow $\Pi$-子群, 则它将是群 $G$ 的唯一 Sylow $\Pi$-子群. 换一种说法, 由于任意子群在它自己的正规化子中是正规子群, 因此即得定理:

*任意群的任一 Sylow $\Pi$-子群是其正规化子中的唯一 Sylow $\Pi$-子群, 即是它含有其正规化子中所有元素, 它们的阶的所有素因数都属于集 $\Pi$.*

Sylow $\Pi$-子群的正规化子的进一步性质依赖于下面这一事实.

*群 $G$ 中与 Sylow $\Pi$-子群 $Q$ 共轭的任意子群本身也是 Sylow $\Pi$-子群. 特别, Sylow $\Pi$-子群不可能和自己的真子群共轭.*

这是因为, 若 $Q'=g^{-1}Qg$ 且若 $Q'$ 包含在群 $G$ 的较大 $\Pi$-子群 $Q''$ 中, 则 $gQ''g^{-1}$ 以 $Q$ 为自己的真子群, 这和 Sylow $\Pi$-子群的定义是矛盾的.

由之不难得出定理:

*Sylow $\Pi$-子群的正规化子与它自己的正规化子重合.*

事实上, 设 $Q$ 是群 $G$ 的 Sylow $\Pi$-子群并设 $N$ 是它在 $G$ 中的正规化子. 若元素 $x$ 不在 $N$ 内, 则 $x^{-1}Qx\neq Q$. 若是仍然有 $x^{-1}Nx=N$, 则 $x^{-1}Qx\subset N$, 但是这与上面证过的, Sylow 子群在其正规化子中的唯一性是矛盾的. 这就证明了, $N$ 以外的元素 $x$ 与 $N$ 是不可换的.

Sylow 子群理论的基本问题是, 讨论在什么条件下, 给定群的所有 Sylow $\Pi$-子群是彼此共轭的, 也就是组成一个共轭子群系. 然而开始我们先给出两个结果, 它们是在假设这个共轭性已经证明的前提下可以得到的.

*若群 $G$ 的所有 Sylow $\Pi$-子群彼此共轭且若 $A$ 是 $G$ 中的正规*

*化子，则 $A$ 和群 $G$ 的 Sylow $\Pi$-子群 $Q$ 之交是 $A$ 的 Sylow $\Pi$-子群.*

事实上，若 $A\cap Q=D$ 不是群 $A$ 的 Sylow $\Pi$-子群，则它含在此群的一个 Sylow $\Pi$-子群 $D'$ 中，而 $D'$ 自己又必含在群 $G$ 的一个 Sylow $\Pi$-子群 $Q'$ 中. 依条件，$g^{-1}Q'g=Q$, $g\in G$, 因此 $g^{-1}D'g\subseteq Q$, 又因为(由 $A$ 的正规性)$g^{-1}D'g\subseteq A$, 故 $g^{-1}D'g\subseteq D$. 但是由之便有 $D'\subseteq gDg^{-1}$, 随之可得 $D'\subset gD'g^{-1}$, 但因为 $gD'g^{-1}\subset A$, 这与 $D'$ 是群 $A$ 的 Sylow $\Pi$-子群是矛盾的，这样就证完了上面的断语.

*若 $Q$ 是群 $G$ 的 Sylow $\Pi$-子群，$N$ 是它在 $G$ 中的正规化子且若在包含 $N$ 的子群 $H$ 中所有 Sylow $\Pi$-子群彼此共轭，则 $H$ 与它在 $G$ 中的正规化子重合.*

这是因为，若 $G$ 中元素 $g$ 使 $g^{-1}Hg=H$, 则 $g^{-1}Qg\subset H$. 因此依假设在 $H$ 中存在元素 $h$, 使 $h^{-1}g^{-1}Qgh=Q$, 由之 $gh\in N$, 即 $gh\in H$ 随之 $g\in H$.

利用自由积的概念以及关于自由积的子群的定理(参看§34)，是可以构造群的例子，以说明上面两个定理，若是没有关于 Sylow 子群共轭性的那些假设，就不成立. 另一方面三次对称群这一例子说明，在这两个定理中的第一个中不能把正规子群改换成任意子群.

现在我们将仅就 Sylow $p$-子群的情形来讨论在什么条件下，给定群的 Sylow 子群的共轭性是成立的；关于 Sylow $\Pi$-子群的情况放在下一章去讨论.

首先证明下面这个关于 $p$-群的结果:

*若 $p$-群 $G$ 含有有限指数 $j$ 的子群，则 $j$ 必是数 $p$ 的幂.*

事实上，由 §11 我们知道，在这些假设下在 $A$ 中含有群 $G$ 的正规子群 $D$, 也有有限指数. 商群 $G/N$ 将是有限 $p$-群，依上面证过的知其阶是 $p$ 的幂，譬如说是 $p^n$. 群 $A$ 在 $G/D$ 中对应的子群 $A/D$

也有指数 $j$. 随之，数 $j$ 是 $p^n$ 的因数.

现在我们来证明下面定理(Курош[15]).

若群 $G$ 含有 $p$-子群 $A$，它有有限多个共轭子群，则对群 $G$ 的任意 $p$-子群 $B$ 至少可指出一个子群，它与 $A$ 共轭且与 $B$ 一起生成 $p$-子群. 除此以外，若还知任一和 $A$ 共轭的子群与 $A$ 一起都不生成 $p$-子群，则与 $A$ 共轭的子群个数模 $p$ 等于 1.

设与 $A$ 共轭的子群 $A', \cdots, A^{(k)}$ 具有下面性质：子群

$$C=\{A, A', \cdots, A^{(k)}\}$$

是 $p$-子群，但与 $A$ 共轭的任一子群都不能再添加到 $C$ 上去而仍保留这个性质. 若是定理第二部分中的假设成立的话，则显然必是 $C=A$. 任一与 $C$ 共轭的子群都可由与 $A$ 共轭的一些子群来生成，因此 $C$ 只有有限个共轭子群. 任两个与 $C$ 共轭的子群不能合在一起生成一个 $p$-子群，因为不然的话 $C$ 将和一个与自己共轭的子群一起生成一个 $p$-子群，而这是和子群 $C$ 的定义相矛盾的.

今取群 $G$ 的一个任意 $p$-群 $Q$ 而用 $\mathfrak{M}$ 表示与 $C$ 共轭且其正规化子不含 $Q$ 的所有子群组成的系. 系 $\mathfrak{M}$ 可能是空的. 若是它不空且若子群 $C'$ 属于它，则利用 $Q$ 中元素得到的与 $C'$ 共轭的子群个数是有限的，并且是 $p$ 的正幂：这是因为，这个数等于子群 $C'$ 的正规化子与 $Q$ 之交在 $Q$ 中的指数，且这个交异于 $Q$，此外只要利用一下上面证过的关于 $p$-群中子群的指数的结果便得.

若

$$C''=q^{-1}C'q, \quad q\in Q,$$

则子群 $C''$ 属于 $\mathfrak{M}$. 这是因为，若是子群 $C''$ 的正规化子包含 $Q$，则利用反变形便将得到 $Q$ 在子群 $C'$ 的正规化子中. 注意到 $Q$ 是子群，可知，系 $\mathfrak{M}$ 可划分成互不相交的子系，每一子系是由借助 $Q$ 中元素彼此共轭的子群组成，因此，若是 $\mathfrak{M}$ 不空，则属于 $\mathfrak{M}$ 的子群的总数被 $p$ 整除.

现在把子群$C$取作$Q$. 任意与$C$共轭且异于$C$的子群$C'$的正规化子不可能包含$C$，因为不然的话，正如在本节中曾证过的那样，$C$和$C'$将共同生成一个$p$-子群，而这是不可能的. 这样，在此种情况系$\mathfrak{M}$由除$C$本身以外一切与$C$共轭的子群组成，因此，与$C$共轭的子群的总个数模$p$等于1. 这就证明了定理的第二个论断.

最后，取给定的$p$-群$B$作为$Q$. 对于此种情况所构造的系$\mathfrak{M}$不可能包含所有与$C$共轭的子群，因为它们的个数按模$p$等于1，而属于$\mathfrak{M}$中的子群个数是$p$的倍数或者$\mathfrak{M}$是空的. 随之，存在有子群$C'$，它与$C$共轭且其正规化子含有$B$，而此时将得$\{C', B\}$是$p$-子群. 这样，与$A$共轭而含于$C'$中的任意子群将更是与$B$一起生成一个$p$-子群. 定理证完.

由此定理可推得下面定理，它是在 Дицман, Курош 和Узков [1]中被证明的.

*若群$G$的 Sylow $p$-子群$P$具有有限多个共轭子群，即是它的正规化子$N$在$G$中有有限指数，则这些与$P$共轭的子群穷尽了群$G$的所有 Sylow $p$-子群. 这些子群的个数模$p$等于1.*

Baer[25]中给出了这个定理的另一个证明；其方法在上面定理的证明中使用了. 这个定理的某些推广可在 Курош[15] 和 Дицман[6, 7]中找到. (参看 补充 18. 2)

在定理的叙述中不能去掉与$P$共轭的子群个数是有限的假设. 这是因为，设$P_1$和$P_2$是两个任意$p$-群，而$G$是它们的自由积,

$$G = P_1 * P_2.$$

若$P_1$不是群$G$的 Sylow $p$-子群，则它包含在一 Sylow $p$-子群$\bar{P}_1$中. $\bar{P}_1$，和任意$p$-群一样，不能分解成自由积，因此，依关于子群的定理(§ 34)，它和自由因子$P_1$，$P_2$中之一的一个子群共轭. 然

而因为 $P_1$ 中的任意元素都不能和 $P_2$ 中元素共轭，故 Sylow $p$-子群 $\bar{P}_1$ 与 $P_1$ 的一个子群共轭，即是与自己的一个真子群共轭，我们知道这是不可能的. 这就证明了，$P_1$ 和 $P_2$ 是 $G$ 中 Sylow $p$-子群，虽然它们不是共轭的并且还甚至不是同构的.

可数对称群 $S$ 是一个周期群而具有不同构的 Sylow$p$-子群的例子. 这是因为，若把群 $S$ 表示成有限对称群升列的并，一次取次数为 $p, p^2, \cdots, p^n, \cdots$，而另一次取次数为 $p+p, p^2+p, \cdots, p^n+p, \cdots$，并取这些群的 Sylow $p$-子群的升列之并，则在相应选择这些升列的条件下可得群 $S$ 的两个 Sylow $p$-子群，其中一个没有中心(参看 Курош[9])，而另一个有 $p$ 阶循环群作其直因子，因而具有中心.

另一方面，在 Baer[25] 中给出群的一个例子，其所有 Sylow $p$-子群彼此共轭，然而它们的个数是无限的.（参看补充 18.1）

对于有限群情形，上面得到的定理就变成 Sylow *第二定理*，它是在 Sylow[1] 中被证明的，例如还在 Frobenius[1] 被重新证过.

*有限群的所有 Sylow $p$-子群彼此是共轭的且它们的个数模 $p$ 等于 1.*

在这个定理的叙述中我们是把 Sylow $p$-子群这个概念解释为不含于较大 $p$-子群中的 $p$-子群. 由 Sylow 第一定理已经可以得出，若 $p^m$ 是有限群 $G$ 的阶之因数中 $p$ 的最高幂，则 $G$ 中含有 $p^m$ 阶子群. 由 Lagrange 定理，这些子群不能含于较大的 $p$-子群中. 另一方面，若是在 $G$ 中存在有 $p^l$ 阶子群，$l<m$，且它不含于较大的 $p$-子群中，则依刚证定理，它该是和 $p^m$ 阶子群相共轭，而显然这是不可能的. 这就证明了，*上面引入的有限群的 Sylow $p$-子群的两种定义是等价的.*

我们现在转入关于任意群的极大周期子群的问题. 上面关于 Sylow$\Pi$-子群($\Pi$ 是任意的)所说过的对于这种情形当然也是适用的，故下面将不作特别说明而直接引用. 具有无限多个极大周期

子群的群是存在的[1]. 与此同时，对极大周期子群有下面的定理，在一定意义下它是和 Sylow 定理相平行的.

*若 $G$ 是任意群，则或者它具有唯一的极大周期子群，或者是它任意的极大周期子群在其中有无限多个共轭子群.*

因而，这个定理排除了极大周期子群为有限个（大于 1）的情形. 为了证明它，首先指出，若群 $G$ 含有是正规子群的极大周期子群，则我们已知道这个子群将是唯一的，即是，它是一切有限阶元素组成. 剩下来只要说明，*若假设在 $G$ 中有非正规子群的极大周期子群 $Q$，并且它只有有限多个共轭子群，则必将引出矛盾.*

首先假设子群 $Q$ 是有限的. 此时子群 $Q$ 以及所有与它共轭的子群的元素全体作成有限不变集 $\mathfrak{M}$，且它是由有限阶元素组成的. 但依 Дицман 引理（§53）此集 $\mathfrak{M}$ 生成有限子群；而此子群包含 $Q$ 且异于 $Q$，这和周期子群 $Q$ 的极大性是矛盾的.

今转到一般情形. 设 $N$ 是子群 $Q$ 在 $G$ 中的正规化子. 依假设它异于 $G$，但在 $G$ 中有有限指数. 若 $Q'$ 是与 $Q$ 共轭的子群，则 $Q' \cap N = Q' \cap Q$，因为 $N$ 中所有有限阶元素含在 $Q$ 中. 因此交 $Q' \cap Q$ 在 $Q'$ 中（随之，利用对称的考虑，也在 $Q$ 中）有有限指数[2]. 利用 Poincaré 定理，由之便可得，与 $Q$ 共轭的所有子群之交 $D$ 在 $Q$ 中也有有限指数；同时它是 $G$ 中的正规子群. 在商群 $G/D$ 中子群 $Q/D$ 是有限极大周期子群，并且它有有限个共轭子群，但不是正规子群. 这就归结为在前段讨论过的情形. 定理证完.（参看补充 21.2）

**$p$-群的中心** 在有限群的理论中下面定理起着重要作用.

*任意有限 $p$-群具有异于 $E$ 的中心.*

这个定理可由下面的 Дицман[1]定理推出，它已是关于任意

1) 例如，利用自由积是可以构造这样的例子的.

2) 实际上，$Q' \cap N$ 在 $Q'$ 的指数不大于 $N$ 在 $G$ 中的指数.

(即不一定是有限)$p$-群的了.

*若 $p$-群具有异于 $E$ 的有限共轭元素系，则它的中心异于 $E$.*

设在 $p$-群 $G$ 中已给一有限共轭元素系 $\mathfrak{A}$. 子群（还是正规子群）$A=\{\mathfrak{A}\}$ 依 Дицман 引理(参看前一节)是有限的. 由之得，$A$ 的任意元素含于一有限(在 $G$ 中)共轭元素系，即它的正规化子在 $G$ 中的指数是有限的，因而如上面已证，此指数是 $p$ 的幂. 设正规子群 $A$ 被划分成 $q$ 个共轭元素系，依次由 $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \cdots, p^{\alpha_q}$ 个元素组成. 若 $p^n$ 是群 $A$ 的阶，则

$$p^n = p^{\alpha_1} + p^{\alpha_2} + \cdots + p^{\alpha_q}$$

但因为在这些系中还有单位系，例如说是 $p^{\alpha_1}=1$，故得在诸数 $p^{\alpha_2}, \cdots, p^{\alpha_q}$ 中还应当有等于 1 者，由之便得群 $G$ 有非平凡的中心. Дицман 定理证完.

无限 $p$-群远远不是永远具有中心. Курош[9]首先发表了没有中心的 $p$-群的例子. 下面这个较简单的这种群的例子是由 Шмидт[6]给出的.（还可参看 Baer[24]）

用 $P_n$ 表示 $p^{n+1}$ 次对称群中由置换

$$b_k=(kp-p+1, kp-p+2, \cdots, kp), k=1, 2, \cdots, p^n$$

（这些置换是长度为 $p$ 的循环）以及长度为 $p^n$ 的 $p$ 个循环相乘所得的置换 $a$,

$$a=\prod_{l=1}^{p}(l, p+l, 2p+l, \cdots, kp-p+l, \cdots, p^{n+1}-p+l)^{1)}$$

生成的子群. 容易验证在 $P_n$ 中下列关系式成立:

$$\left.\begin{array}{l} a^{p^n}=1; \quad b_k^p=1, \quad k=1, 2, \cdots, p^n; \\ b_i b_j = b_j b_i, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant p^n; \\ a^{-1} b_k a = b_{k+1}, \quad k=1, 2, \cdots, p^n-1; \\ a^{-1} b_{p^n} a = b_1. \end{array}\right\} \tag{1}$$

1）若将所有 $p^n$ 个循环 $b_k$ 由上到下依次写出，则组成元素 $a$ 的那些循环恰是与所得矩阵的列相对应者.

由这些关系式可得，子群 $B_n=\{b_1, b_2, \cdots, b_{p^n}\}$ 是群 $P_n$ 中的正规子群. $P_n$ 中任一元素 $x$ 可写成 $x=a^s b$，其中 $0\leqslant s<p^n$，$b\in B_n$，并且记法是唯一的，因为 $a^{p^{n-1}}\notin B_n$，因此 $\{a\}\cap B_n=E$. 由之便得，$P_n$ 是 $p^{2n+1}$ 阶的 $p$-群. 这就证明了，关系式(1)组成群 $P_n$ 的定义关系式系，因为由这些关系式就已得出，它们所定义的群有不大于 $p^{2n+1}$ 的阶.

引入下面记法：

$$a'=a^p$$

$$b_1'=b_1, b_2'=b_{p+1}, \cdots, b_k'=b_{kp-p+1}, \cdots, b'_{p^{n-1}}=b_{p^n-p+1}.$$

显然，子群 $P_n'=\{a', b_1', b_2', \cdots, b'_{p^{n-1}}\}$ 的阶不小于 $p^{2(n-1)+1}$. 另一方面，直接验证可知在群 $P_n'$ 中关系式(1′)是成立的，这里的(1′)是把(1)中的 $n$ 换成 $n-1$ 并把所有的 $a, b$ 添加撇而得到的，因此 $P_n'$ 的阶不大于 $p^{2(n-1)+1}$. 这样我们证得，群 $P_n'$ 和群 $P_{n-1}$ 是同构的. 对所有的 $n$，我们把群 $P_{n-1}$ 同构的嵌入到群 $P_n$ 中，这样便得到有限 $p$-群的无限递增列，此列之并是一个无限 $p$-群 $P$.

今证，群 $P$ 的中心等于 $E$. 为此考察群 $P_n$ 的中心. 由于有等式

$$a^{-p^{n-1}}b_1a^{p^{n-1}}=b_{p^{n-1}+1},$$

故它不可能包含元素 $a$ 或它的幂. 因此一般对 $P_n$ 的不在子群 $B_n$ 中的任意元素都可找到 $B_n$ 的一个元素与之不可换. 随之，群 $P_n$ 的中心在子群 $B_n$ 中. 其次，易见子群 $B_n'=\{b_1', b_2', \cdots, b'_{p^{n-1}}\}$ 中任意异于 1 的元素与元素 $a$ 不可换，因此位于群 $P_n$ 的中心之外. 注意到 $P_n'\cap B_n=B_n'$，这就证明了，群 $P_n$ 的中心与子群 $P_n'$ 的交等于 $E$. 假若在群 $P$ 的中心内真有异于 1 的元素，则它将属于某一群 $P_n$ 中且在所有群 $P_m$, $m\geqslant n$ 中，并将进入到这些群的中心内. 但这与刚证完的结果是矛盾的.

## §55. 局部性质

设$W$表示群可能具有的一个性质而设$G$是一个群，它的所有由有限个元素生成的子群都具有性质$W$. 由之完全不一定能得出，群$G$也具有性质$W$，故按照这个路子可以定义一系列很自然的群类. 例如，局部有限群和局部自由群就是这样的类.

另一方面，性质$W$也可能是这样的，只要它对群$G$中有限个元素生成的所有子群都成立就能得到它对整个群$G$也成立；群的交换性可作一个最简单的例子. 将在群论的许多分支中遇到这种类型的“局部定理”. 此时一般地没有必要使用所有的有限个生成元的子群，也没有必要把局部定理是否成立的问题一定要和具有有限个生成元的子群联系在一起. 这个问题的自然提法应当是（参看 Курош, Черников[1]）：群$G$的某子群集$L$叫作是此群的*局部子群系*，若

1）群$G$的任一元素含在$L$中的至少一个子群中，

2）$L$中的任意两个子群（因而任意有限个这样的子群）包含在$L$中的某一子群中.

群$G$的所有有限生成元的子群系，以及所有有限个元素生成的正规子群系都是$G$的局部系的例子. 显然，群的所有子群的全体，以及其所有正规子群的全体也是局部系. 另一方面，只由所给群本身组成的系也是局部系.

将说群$G$*局部地具有性质*$W$，如果在$G$中至少存在一个局部子群系，在此系中的所有子群都有性质$W$. 证明*对于性质$W$的局部定理*现在来说就是指，要证明，如果群局部地具有此性质，则群本身必也具有这个性质$W$. 然而有时常对所考察的局部系加以补充的限制，例如要求属于此系的子群都是正规子群.

Мальцев[3] 指出了一个证明局部定理的一般方法. 这个方

法利用了数理逻辑的工具并依赖于一个 Мальцев 定理，它涉及狭义谓词演算。不过，这个定理本身利用下述方法是可以容易证明的。这个方法是由 Курош 关于紧致拓扑空间论的工作（还可参看 Курош[12]）引伸出来的．这个方法本身也常被用来证明群论中的局部定理——参看 § 47b.

设给出有限集 $A_\alpha, A_\beta, A_\nu, \cdots$ 组成的系 $S$，它借助关系

$$A_\alpha \leqslant A_\beta$$

（读作：集 $A_\alpha$ 在集 $A_\beta$ 之前，集 $A_\beta$ 在集 $A_\alpha$ 之后）成为一个偏序系．关于 $S$ 中的偏序性我们作如下假设：

1）对于 $S$ 中任意两个集 $A_\alpha, A_\beta$ 必有 $S$ 中的一个集 $A_\nu$，使 $A_\alpha \leqslant A_\nu$，$A_\beta \leqslant A_\nu$.

其次，我们假设，对任意一对有关系 $A_\alpha \leqslant A_\beta$ 的集 $A_\alpha$ 和 $A_\beta$，确定一个由集 $A_\beta$ 到整个集 $A_\alpha$ 上的单值映射 $\pi_{\beta\alpha}$，称之为 $A_\beta$ 到 $A_\alpha$ 上的投影．$A_\beta$ 中的任一元素在此投影下在 $A_\alpha$ 中有一唯一的象；对于 $A_\alpha$ 中的任一元素在 $A_\beta$ 中至少有一个原象．在系 $S$ 中定义的这些投影要满足下列条件：

2）若 $A_\alpha \leqslant A_\beta$，$A_\beta \leqslant A_\nu$，则投影 $\pi_{\nu\alpha}$ 等于顺序执行投影 $\pi_{\nu\beta}$ 和 $\pi_{\beta\alpha}$ 的结果.

3）投影 $\pi_{\alpha\alpha}$ 等于集 $A_\alpha$ 到自身上的恒等变换.

集 $P$ 是由某些 $A_\alpha$ 中取出的一些元素组成的，亦即它是系 $S$ 中所有 $A_\alpha$ 之并的一个子集．称 $P$ 为投影集，如果对 $P$ 中任意两个元素 $a, b$，就在此集 $P$ 中必有一元素 $c$，它是 $a$ 和 $b$ 的公共原象．由某一 $A_\alpha$ 中取出一个元素 $a$ 作成的集，以及由元素 $a$ 和它在 $A_\alpha$ 之前的所有集 $A_\nu$ 中的象组成的集都是投影集的例子.

由投影集 $P$ 的定义可得，$P$ 只能包含每一集 $A_\alpha$ 中的最多一个元素．这是因为，由于投影的唯一性，$A_\alpha$ 中两个不同元素在 $A_\alpha$ 后面的任意集中不可能有共同的原象．其次，若 $P$ 含有元素 $a, b$，它

们顺序属于 $A_\alpha, A_\beta$ 且 $A_\alpha < A_\beta$，则由条件 2）可知元素 $a$ 是元素 $b$ 的象.

一个投影集，若是它包含组成系 $S$ 的每一集 $A_\alpha$ 中的恰好一个元素，将称之为完全的.

我们有下面的一般定理.

*系 $S$ 的任一投影集 $P$ 必是某个完全投影集的一部分.*

**证明** 将系 $S$ 良序之，并且不要求此序与系 $S$ 中原有的偏序有什么关系．这些附有超限足码的集 $A_\alpha$ 下面将改记作 $A^\lambda$, $A^\mu$, $A^\nu$, …．我们只是假定，在所用的良序下，其元素有一在 $P$ 中的任意集 $A_\alpha$，要排在与 $P$ 无交的任意 $A_\beta$ 之前．在每一个集 $A^\lambda$ 中我们想标定一个元素 $a^\lambda$，使得*这些标定元素的任意有限系在 $S$ 中具有一个共同的原象*．我们先规定，投影集 $P$ 中的元素就是它们所在的 $A_\alpha$ 中的标定元素.

设对所有 $\lambda < \mu$，在 $A^\lambda$ 中已标定了元素 $a^\lambda$．其次，设集 $A^\mu$ 是由元素 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 组成，并假设对每一 $b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$，可以指出一个由已标定元素

$$a_i^{\lambda_1}, a_i^{\lambda_2}, \cdots, a_i^{\lambda_{s(i)}}, \quad \lambda_j < \mu, \quad j = 1, 2, \cdots, s(i),$$

组成的有限系，使得系 $(i)$ 中元素和元素 $b_i$ 在 $S$ 中没有共同原象．所有系 $(i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的并是一个标定元素的有限系，随之，对于它存在一属于某个 $A_\beta$ 的共同原象 $c$．此时我们取一个位于 $A_\beta$ 和 $A^\mu$ 后面的集 $A_\gamma$ 以及其中一个元素 $d$——它是元素 $c$ 的原象之一．元素 $d$ 在集 $A^\mu$ 中的象将是某个 $b_{i_0}$．这样我们得到，元素 $b_{i_0}$ 和系 $(i_0)$ 具有共同原象，这与我们开始的假设是矛盾的.

这样我们证明了，标定元素 $a^\mu$ 是可以在每一集 $A^\mu$ 中选出的．若是 $A^\mu$ 中有若干个元素都可为标定元素，则为了确定起见可对集 $A^\mu$ 的元素重新编号而每一次都取具最小编号者.

所有标定元素的集 $\bar{P}$ 是投影集．事实上，若在集 $A^\mu$ 和 $A^\nu$ 标

定了元素 $a^{\mu}$ 和 $a^{\nu}$, 则在 $A^{\mu}$ 和 $A^{\nu}$ 后面的某一集 $A^{\lambda}$ 中, 这两个元素有共同原象. 在 $A^{\lambda}$ 中标定了元素 $a^{\lambda}$, 但因为元素 $a^{\mu}$, $a^{\nu}$ 和 $a^{\lambda}$ 应当具有共同原象, 则依(2)$a^{\lambda}$ 是 $a^{\mu}$ 和 $a^{\nu}$ 的共同原象. 投影集 $\bar{P}$ 包含集 $P$ 且是完全的. 这就完成了定理的证明.

若把投影 $\pi_{\beta\alpha}$ 的定义改变, 使它是集 $A_{\beta}$ 到集 $A_{\alpha}$ 内而不一定是到整个集 $A_{\alpha}$ 上的单值映射, 则对于这种情形, 根据刚证的定理, *可以断言在系 $S$ 中存在有完全投影集.*

事实上, 在集 $A_{\alpha}$ 中存在有这样一些元素 $x$, 它们在任意 $A_{\beta}$, $A_{\beta} \geqslant A_{\alpha}$, 中具有原象: 这是因为, 若 $A_{\alpha}$ 由元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成且若对每一 $i$, $i=1, 2, \cdots, n$, 可以指出这样一个集 $A_{\beta_i}$, 使 $A_{\beta_i} > A_{\alpha}$, 而元素 $x_i$ 在 $A_{\beta_i}$ 中没有原象, 则集 $A_{\nu}$, $A_{\nu} \geqslant A_{\beta_i}$, $i=1, 2, \cdots, n$, 就根本不能被映射到 $A_{\alpha}$ 中, 而这是不可能的. $A_{\alpha}$ 中一切具有上述性质的元素 $x$ 的全体记作 $A'_{\alpha}$. 在投影 $\pi_{\beta\alpha}$ 下集 $A'_{\beta}$ 被映到整个集 $A'_{\alpha}$ 上: 这是因为, 若是 $A'_{\alpha}$ 中元素 $x$ 在 $A_{\beta}$ 的原象 $y_1, \cdots, y_k$ 中没有一个属于 $A'_{\beta}$, 则存在有 $A_{\nu}$, $A_{\nu} > A_{\beta}$, 且在其中 $y_1, \cdots, y_k$ 每一都没有原象. 然而此时在 $A_{\nu}$ 中对于 $x$ 也将没有原象, 而这是不可能的. 对于集 $A'_{\alpha}$ 组成的系已经可以使用上面证过的定理了.

现在我们应用上述方法来证明一个关于Sylow $p$-子群的定理 (Baer[25]; 所述证明引自 Гольберг[2]). 先引入下面一些新概念.

群 $G$ 的自同构 $\varphi$ 叫作*局部内的*, 如果对此群任意有限个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的集, 可以在 $G$ 中找到一个元素 $g$, 一般说它依赖于所取用的集, 使得

$$a_i\varphi = g^{-1}a_i g \qquad i=1, 2, \cdots, n.$$

群 $G$ 的两个子群 $A$ 和 $B$ 叫作*局部共轭的*, 如果存在群 $G$ 的局部内自同构将 $A$ 映到 $B$ 上.

我们想证明定理:

局部正规群的任意两个 Sylow $p$-子群是局部共轭的，随之是同构的.

事实上，设在局部正规群 $G$ 中给定一 Sylow $p$-子群 $P$. 我们来证明，子群 $P$ 和 $G$ 中任意有限正规子群 $H_\alpha$ 的交必是 $H_\alpha$ 中的 Sylow $p$-子群.

实际上，用 $A_\alpha$ 表示有限群 $H_\alpha$ 的所有含交 $P\cap H_\alpha$ 的 Sylow $p$-子群的集. 集 $A_\alpha$ 是有限的且不空. 当 $H_\alpha$ 取遍群 $G$ 的所有有限正规子群时，相应的有限集 $A_\alpha$ 组成一个系 $S$. 若当 $H_\alpha\subset H_\beta$ 时令 $A_\alpha\leqslant A_\beta$，则 $S$ 成为一个偏序系. 它还是个格，因此条件 1) 是成立的.

当 $A_\alpha\leqslant A_\beta$ 时如下面的方式定义投影 $\pi_{\beta\alpha}$. 若群 $H_\beta$ 的 Sylow $p$-子群 $P'$ 属于 $A_\beta$，即是

$$P'\supseteq P\cap H_\beta$$

则考察交 $P'\cap H_\alpha=P''$. 因为 $H_\alpha$ 是 $H_\beta$ 中的正规子群，而有限群 $H_\beta$ 的所有 Sylow $p$-子群彼此共轭，则如在上节中已证过的，$P''$ 是 $H_\alpha$ 中的 Sylow $p$-子群. 因为

$$P''=P'\cap H_\alpha\supseteq(P\cap H_\beta)\cap H_\alpha=P\cap H_\alpha,$$

故 $P''$ 属于集 $A_\alpha$. 对应

$$P'\longrightarrow P''$$

将是集 $A_\beta$ 到集 $A_\alpha$ 中的投影，并且条件 2) 和 3) 成立：这是因为，若

$$H_\alpha\subset H_\beta\subset H_\nu,$$

而 $P'$ 是 $H_\nu$ 中的 Sylow $p$-子群，则

$$P'\cap H_\alpha=(P'\cap H_\beta)\cap H_\alpha.$$

随之，在系 $S$ 中存在完全投影集. 换言之，在每一集 $A_\alpha$ 中可以选定一个 Sylow $p$-子群 $P_\alpha$，使得其中任意两个 $P_\alpha$ 和 $P_\beta$ 必包含在某第三个子群 $P_\gamma$ 中. 由之便得，所有子群 $P_\alpha$ 的并是群 $G$ 的一

个 $p$-子群，它包含Sylow $p$-子群 $P$，因而和 $P$ 是重合的．这样，对任意 $\alpha$，群 $H_\alpha$ 的Sylow $p$-子群 $P_\alpha$ 与交 $P\cap H_\alpha$ 重合，而这正是要证明的[1)]．

今转来证明定理本身．设在局部正规群 $G$ 中取两个 Sylow $p$-子群 $P_1$ 和 $P_2$．若 $H_\alpha$ 是群 $G$ 的任意有限正规子群，则由上面证过的，交 $P_1\cap H_\alpha$ 和 $P_2\cap H_\alpha$ 都是 $H_\alpha$ 中的 Sylow $p$-子群，随之在 $H_\alpha$ 中是共轭的．群 $H_\alpha$ 的自同构中，所有那些既是群 $G$ 的内自同构在 $H_\alpha$ 上的局限，又将 $P_1\cap H_\alpha$ 映到 $P_2\cap H_\alpha$ 上的全体记作 $A_\alpha$．集 $A_\alpha$ 是有限的且不空．当 $H_\alpha\subset H_\beta$ 时令 $A_\alpha\leqslant A_\beta$，并如下来定义投影 $\pi_{\beta\alpha}$：若 $\varphi$ 是群 $H_\beta$ 的自同构且属于 $A_\beta$，则它是由群 $G$ 的一个内自同构诱导出来的，因而它自己也诱导出正规子群 $H_\alpha$ 的一个自同构 $\varphi'$；又因为 $\varphi$ 把 $P_1\cap H_\beta$ 映到 $P_2\cap H_\beta$ 上，故 $\varphi'$ 也把 $P_1\cap H_\alpha$ 映到 $P_2\cap H_\alpha$ 上，即是说 $\varphi'$ 属于 $A_\alpha$．此时我们规定，投影 $\pi_{\beta\alpha}$ 把 $\varphi$ 映到 $\varphi'$．

显然，条件 1)，2) 和 3) 都是成立的，因而可以应用关于完全投影集的存在定理．随之，在每一集 $A_\alpha$ 中可选定一个自同构 $\varphi_\alpha$，使得这些自同构中的任意两个 $\varphi_\alpha$ 和 $\varphi_\beta$ 是由某一自同构 $\varphi_\nu$ 诱导出来的．群 $G$ 是局部正规的，因此，自同构 $\varphi_\alpha$ 的全体确定群 $G$ 的一个自同构，它是局部内自同构且把 $P_1$ 映到 $P_2$ 上．定理证完．

在此定理的陈述中不能将群 $G$ 的局部正规性换成局部有限性，这一点可由上一节提到的可数对称群的例子看出．

## §56. 正规系和不变系

在下面几章中我们将使用有限正规列（参看 §16）概念的一个推广以及与它有关的关于Schreier 定理和 Jordan-Hölder 定理

---

1) М. И. Эйдинов 通知作者，上面刚证得的断语，也可从 §54 中引用的作者的工作[15]的一个定理推得，这时要令 $B=P$，并取群 $H_\alpha$ 的任意Sylow $p$-子群作为 $A$．

的一些推广．这些结果在 Курош[4]和 Birkhoff[2] 中已有所酝酿而包含在 Курош[14]中；还可参看 Курош 和 Черников[1]．

设在具任意运算子系的群 $G$ 中给定一个容许子群系 $\mathfrak{A}=[A_\alpha]$，它含有单位子群 $E=A_0$ 以及整个群 $G=A_\mu$．其次设足码 $\alpha$ 历遍某一足码集 $\mathfrak{M}$，它利用关系＜而成有序集且由 $\alpha<\beta$ 有 $A_\alpha\subset A_\beta$，即是子群系 $\mathfrak{A}$ 按集合的包含关系给以序．若在集 $\mathfrak{M}$ 中有元素，它直接跟在 $\alpha$ 后，则将用 $\alpha+1$ 表示它并称子群 $A_\alpha$ 和 $A_{\alpha+1}$(如上说过的，此时有 $A_\alpha\subset A_{\alpha+1}$)组成系 $\mathfrak{A}$ 中的一个桥．

子群的有序系 $\mathfrak{A}$ 叫作**完备的**，若对它的任意子系，属于此子系的子群的并和交也在 $\mathfrak{A}$ 中，即是对在 $\mathfrak{A}$ 中作出的任意 Dedekind 分割中，无论是此分割的第一类中的子群之并，还是第二类中所有子群之交都属于 $\mathfrak{A}$．**任意由子群组成的序系 $\mathfrak{A}$ 可以完备化**：为此只需把所有分割的第一类之并与第二类之交添加给 $\mathfrak{A}$ 即可；此时容易验证，这样得到的子群系仍是有序的，然而已是完备的了．

**任意完备的子群系 $\mathfrak{A}=[A_\alpha]$ 具有桥**，并且在此系中桥还是稠密分布的．事实上，群 $G$ 的任一元素 $x$，$x\neq1$，确定系 $\mathfrak{A}$ 中的一个桥：这是因为，若把子群 $A_\alpha$ 中不含元素 $x$ 的归到第一类，而将含有 $x$ 者归到第二类，我们便得到系 $\mathfrak{A}$ 中的一个分割．由于系 $\mathfrak{A}$ 是完备，它含有第一类子群的并和第二类子群的交，并且这两个子群是不同的，因为第一个不含元素 $x$，而第二个含有 $x$．随之，它们组成一个桥．

现在可以来定义本节中的基本概念．群 $G$ 的由(容许)子群组成的任一完备有序系 $\mathfrak{A}=[A_\alpha]$，它含有 $E$ 和 $G$ 且满足下面补充要求：对系 $\mathfrak{A}$ 的任一个桥 $A_\alpha, A_{\alpha+1}$，子群 $A_\alpha$ 都是 $A_{\alpha+1}$ 的正规子群，则称 $\mathfrak{A}$ 为群 $G$ 的**正规系**．显然，群的任意有限正规列是它的正规系．

正规系 $\mathfrak{A}'$ 叫作正规系 $\mathfrak{A}$ 的**加密**，如果在 $\mathfrak{A}$ 中的任意子群也都

在 $\mathfrak{A}'$ 中．这里要提一下的是，此时属于 $\mathfrak{A}'$ 而不属于 $\mathfrak{A}$ 的任意子群 $A'$ 必落在系 $\mathfrak{A}$ 的某个桥内，这就是说它必位于 $\mathfrak{A}$ 中所有含在 $A'$ 中的子群之并与 $\mathfrak{A}$ 中所有含 $A'$ 的子群之交的中间．

群 $G$ 的再不能进一步加密的正规系叫作合成系．

*群 $G$ 的任一正规系 $\mathfrak{A}$ 都可加密为合成系．*

为了证明令 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1$．设对所有小于某一 $\delta$ 的序数 $\gamma$ 已定义好正规系 $\mathfrak{A}_\gamma$，并且它们组成一个升链．若序数 $\delta$-1 存在且若系 $\mathfrak{A}_{\delta-1}$ 还不是合成系，则取 $\mathfrak{A}_{\delta-1}$ 的加密中的一个为 $\mathfrak{A}_\delta$．若是 $\delta$ 是极限序数，则把所有 $\mathfrak{A}_\gamma$，$\gamma<\delta$，之并记作 $\mathfrak{A}'_\delta$．一般说，这个系不是完备的，但依上述方法所得到它的完备化系将是满足正规系定义中的所有条件的，因而可把它取作 $\mathfrak{A}_\delta$．

事实上，显然系 $\mathfrak{A}_\delta$ 是关于包含关系有序的．其次，系 $\mathfrak{A}_\delta$ 是完备的，这是因为，$\mathfrak{A}_\delta$ 中的任一分割在任意 $\mathfrak{A}_\gamma$，$\gamma<\delta$，中必产生一相应的分割，所有这些分割的第一类（相应地第二类）具有属于 $\mathfrak{A}_\gamma$ 的并（交），因而它们也属于 $\mathfrak{A}'_\delta$，而此时所有这些并（交）的并（交）依假设含在 $\mathfrak{A}_\delta$ 中且是所给分割的整个第一类的并（整个第二类的交）．最后，系 $\mathfrak{A}_\delta$ 在桥处满足正规性条件．这是因为，系 $\mathfrak{A}_\delta$ 的任一桥 $A_\alpha$，$A_{\alpha+1}$ 确定系 $\mathfrak{A}_\gamma$ 中的一个桥 $A_{\alpha\gamma}$，$A_{\alpha\gamma+1}$，并且当 $\gamma<\gamma'$ 时有 $A_{\alpha\gamma}\subseteq A_{\alpha\gamma'}$，$A_{\alpha\gamma+1}\supseteq A_{\alpha\gamma'+1}$．这样 $A_\alpha$ 是所有 $A_{\alpha\gamma}$ 的并而 $A_{\alpha+1}$ 是所有 $A_{\alpha\gamma+1}$ 之交，又因为任一 $A_{\alpha\gamma}$ 都是 $A_{\alpha\gamma+1}$ 中的正规子群，随之也是 $A_{\alpha+1}$ 中的正规子群，故 $A_\alpha$ 也是 $A_{\alpha+1}$ 中的正规子群．

构造系 $\mathfrak{A}_\delta$ 的过程将停止在某一 $\delta=\delta_0$ 上，同时系 $\mathfrak{A}_{\delta_0}$ 就是所求的合成系．定理证完．

若取群的所有内自同构作为运算子系，则正规系的概念便变成不变系的概念，它是群 $G$ 的一些正规子群组成的系，含有 $E$ 和 $G$，且依包含关系作成完备有序系；在桥处正规性的要求此时自然成立．合成系的概念现在就变成主系的概念，即它是不再能进一

步不变加密的不变系.

依递增关系是良序的正规系叫作*递增正规列*；有限正规列是它的特殊情况. 相应地可定义*递增不变列*，*递增合成列*，*递增主列*等概念. 另一方面，依递降关系是良序的正规系将称之为*递降正规列*等等.

现在来讨论§16中基本定理的推广. 若在群$G$中给定正规系$\mathfrak{A}=[A_\alpha]$，则此系中的任一个桥$A_\alpha, A_{\alpha+1}$对应着一个商群$A_{\alpha+1}/A_\alpha$，称之为系$\mathfrak{A}$的一个因子. 有下面关于子群的定理.

*若在带任意运算子系的群$G$中给定一个正规系$\mathfrak{A}=[A_\alpha]$，则此群的任意(容许)子群$F$具有一个正规系，它的那些因子和系$\mathfrak{A}$的某些不同因子的子群同构.*

令

$$B_\alpha=F\cap A_\alpha,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\mu.$$

系$\mathfrak{B}=[B_\alpha]$是群$F$的子群组成的有序系，可能有一些重复的，并且$B_0=E, B_\mu=F$. 由系$\mathfrak{A}$的完备性得系$\mathfrak{B}$也是完备的，但这里我们要约定，*一个带重复的子群的有序系说是完备的*，如果对此系中任一分割必出现下列三种可能之一：1）分割的第一类有最后一个子群，而第二类有开头的子群，2）分割的第一类有最后一个子群，它是第二类中子群的交，3）分割的第二类有开头的子群，它是第一类中子群的并.

系$\mathfrak{B}$的任一个桥$B_\alpha, B_{\alpha+1}$对应着系$\mathfrak{A}$的一个桥$A_\alpha, A_{\alpha+1}$. 利用$A_\alpha$在$A_{\alpha+1}$中的正规性和等式

$$B_\alpha=B_{\alpha+1}\cap A_\alpha$$

并应用Zassenhaus引理，便得$B_\alpha$在$B_{\alpha+1}$中的正规性以及同构对应

$$B_{\alpha+1}/B_\alpha\simeq A_\alpha B_{\alpha+1}/A_\alpha.$$

但是

$$A_\alpha B_{\alpha+1} \subseteq A_{\alpha+1},$$

因此商群 $A_\alpha B_{\alpha+1}/A_\alpha$ 同构于商群 $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ 的子群. 最后，由系 $\mathfrak{B}$ 的完备性，此系的彼此相等的子群的集有头一个子群也有最末一个子群，因此，把这样每一个集换成一个群，我们并不引出新的桥，即是我们得到所求的群 $F$ 的正规系.

关于子群的定理已证完. 该补充提到的是，若系 $\mathfrak{A}$ 是递增正规列，则这个对于 $\mathfrak{B}$ 也是成立的.

**Schreier 定理和 Jordan-Hölder 定理的推广.** 群 $G$ 的正规系 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 叫作同构的，如果在这两个系的因子之间可以建立一个相一一映射，使得相对应的因子是同构的. 作为有序集，系 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的序型是否一致这里并不作要求.

断言任意群的任两个合成系是同构的在一般情况下是不可能的，例如整数加群就是这样的反例. 在此群中子群系

$$\{1\}\supset\{2\}\supset\{4\}\supset\cdots\supset\{2^n\}\supset\cdots\supset 0,$$

$$\{1\}\supset\{3\}\supset\{9\}\supset\cdots\supset\{3^n\}\supset\cdots\supset 0$$

是递降主列，但第一列的所有因子都是 2 阶循环群，而第二列的所有因子都是 3 阶循环群. 虽然如此，某些推广 Schreier 定理和 Jordan-Hölder 定理的结果还是可证明的.

设在带任意运算子系的群 $G$ 中给出两个正规系 $\mathfrak{A}=[A_\alpha]$, $0\leqslant\alpha\leqslant\mu$ 和 $\mathfrak{B}=[B_\beta]$, $0\leqslant\beta\leqslant\nu$. 对所有有 $\alpha+1$ 的 $\alpha$ 及所有 $\beta$，令

$$A_{\alpha\beta}=A_\alpha(A_{\alpha+1}\cap B_\beta),$$

对所有有 $\beta+1$ 的 $\beta$ 及所有 $\alpha$，令

$$B_{\beta\alpha}=B_\beta(B_{\beta+1}\cap A_\alpha),$$

把所有 $A_{\alpha\beta}$ 添加到 $\mathfrak{A}$，把所有 $B_{\beta\alpha}$ 添加到 $\mathfrak{B}$，我们便得群 $G$ 的子群的有序系，可能带有重复的；把它们记作 $\overline{\mathfrak{A}}$ 和 $\overline{\mathfrak{B}}$.

在系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 中任一桥具有形状 $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha,\beta+1}$，对其中的 $\alpha$ 言，$\alpha+1$ 是存在的. 把它与系 $\mathfrak{B}$ 中的桥 $B_{\beta\alpha}$, $B_{\beta,\alpha+1}$ 对应起来，便得此二系

的桥之间的相互单值对应. Zassenhaus 引理使得我们可以断言, $A_{\alpha\beta}$ 是 $A_{\alpha,\beta+1}$ 中的正规子群, 而 $B_{\beta\alpha}$ 是 $B_{\beta,\alpha+1}$ 中的正规子群, 并且对应的因子是同构的,

$$A_{\alpha,\beta+1}/A_{\alpha\beta}\simeq B_{\beta,\alpha+1}/B_{\beta\alpha}.$$

在上面给过的对于带有重复的子群系的完备性定义下, 系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 和 $\overline{\mathfrak{B}}$ 可能不是完备的. 事实上, 取定 $\overline{\mathfrak{A}}$ 中的一个分割. 容易验证, 这个分割的第一类的并永远属于 $\overline{\mathfrak{A}}$. 第二类的交则可能不属于 $\overline{\mathfrak{A}}$ 了: 这是由于, 若 $B_\beta$ 是子群 $B_{\beta'}$, $\beta'>\beta$ 的交, 则 $A_{\alpha+1}\cap B_\beta$ 将是子群 $A_{\alpha+1}\cap B_{\beta'}$ 的交, 但是乘积 $A_\alpha(A_{\alpha+1}\cap B_\beta)$ 很可能是小于乘积 $A_\alpha(A_{\alpha+1}\cap B_{\beta'})$, $\beta'>\beta$ 的交.

现在我们作如下的假设:

(*C*) 正规系 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 具有这样性质: 系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 和 $\overline{\mathfrak{B}}$ 包含它们的每一分割的第二类之交, 亦即它们是完备的.

在这种情况下系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 中(也还有系 $\overline{\mathfrak{B}}$ 中)彼此相等的子群集既有第一个也有最末一个子群. 从这些彼此相等的子群组成的每一个集中只留下一个子群, 使得没有重复的系 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{B}}$, 它们顺序包含最初的系 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$. 在由 $\overline{\mathfrak{A}}$ 转到 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 以及由 $\overline{\mathfrak{B}}$ 转到 $\widetilde{\mathfrak{B}}$ 不会出现新的桥, 而除去其相应因子为 $E$ 的桥以外不会丢掉原有的桥, 而从系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 和 $\overline{\mathfrak{B}}$ 的完备性可得系 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{B}}$ 的完备性. 这样, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{B}}$ 就是没有重复的正规系, 彼此间同构并且顺序是 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的加密.

现在我们来用这个方法证明下列定理.

任意群 $G$ 的任意两个递增正规列具有同构的且仍是递增正规列的加密. 特别, 若群 $G$ 具有递增合成列, 则所有这样的列都是彼此同构的.

这是因为, 若系 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 关于递增关系是良序的, 则这个对系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 和 $\overline{\mathfrak{B}}$ 也是成立的, 因而假设(*C*)是被满足的. 作为系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 和 $\overline{\mathfrak{B}}$ 的子系, 系 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{B}}$ 也是良序的.

若在群 $G$ 中给出递增不变列 $\mathfrak{A}$ 和任意不变系 $\mathfrak{B}$，则它们具有不变加密 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{B}}$，而系 $\widetilde{\mathfrak{B}}$ 的因子集是系 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 的因子集的一部分(不一定是真部分)．特别，若群 $G$ 有递增主列 $\mathfrak{A}$，则群 $G$ 的任意别的主系的因子集必是列 $\mathfrak{A}$ 的因子集的一部分．

事实上，对给定的系 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 可构造系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 和 $\overline{\mathfrak{B}}$．系 $\overline{\mathfrak{B}}$ 是完备的，因为它是系 $\mathfrak{B}$ 在每一桥处添补了一个依递增关系是良序的子群系．但系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 可能不是完备的，添加其所有分割的第二类的交，我们可将它补充成一个完备系 $\overline{\mathfrak{A}}'$；由系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 的不变性可得系 $\overline{\mathfrak{A}}'$ 的不变性[1]．系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 的所有因子被保留了，但可能增加一些新的桥，随之增加新的因子，而这些因子不对应着系 $\overline{\mathfrak{B}}$ 的任何因子．由系 $\overline{\mathfrak{A}}'$ 和 $\overline{\mathfrak{B}}$ 转到无重复的不变系 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{B}}$，这样就结束了定理的证明．

设群 $G$ 具有递增主列 $\mathfrak{A}=[A_n]$，其序型为自然数列的序型，或者精确点说，此列 $\mathfrak{A}$ 具有形状

$$E=A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots\subset A_w=G.$$

此时群 $G$ 的所有主系和列 $\mathfrak{A}$ 同构，亦即彼此间都是同构的．

事实上，设 $\mathfrak{B}=[B_\beta]$ 是群 $G$ 的任意主系．构造系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 和 $\overline{\mathfrak{B}}$．因为 $\mathfrak{A}$ 是主系，而我们知道系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 是包含其所有分割的第一类之并的，故对任意 $n$，$n\geqslant 0$，存在有足码 $\beta_n$，$A_{n,\beta_n}=A_n$ 而对所有 $\bar{\beta}>\beta_n$ 有 $A_{n,\bar{\beta}}=A_{n+1}$；换言之，有

$$A_{n+1}\cap B_{\beta_n}\subseteq A_n \tag{1}$$

$$A_n(A_{n+1}\cap B_{\bar{\beta}})=A_{n+1},\quad \bar{\beta}>\beta_n. \tag{2}$$

注意到在证明前一个定理时所说过的，可以断言，若是能对任意 $n$ 可确定足码 $\beta_n+1$ 的存在性，则这个定理就是证明了．这是因为，在这种情况下系 $\overline{\mathfrak{A}}$ 将是完备的，故转到系 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 时，在我们这种情况，即是转到系 $\mathfrak{A}$ 时，不会出现新的因子，随之主系 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是同构的．

1) 如果不是谈论不变系而只是正规系，则证明系 $\overline{\mathfrak{A}}'$ 的正规性已是不可能的了．

首先我们来证明下面引理.

**引理** 若足标 $\beta'$ 和 $\beta''$, $\beta'<\beta''$, 具有下面性质: 对给定的 $n$, 任意 $\beta_i$, $0\leqslant i\leqslant n$ 都不满足不等式 $\beta'<\beta_i<\beta''$, 则有

$$A_{n+1}\cap B_{\beta'}=A_{n+1}\cap B_{\beta''}.$$

事实上, 若 $n=0$, 则由(1)和(2), 有

$$A_1\cap B_{\beta_0}=E \quad A_1\subseteq B_{\bar{\beta}}, \text{ 当 } \bar{\beta}>\beta_0 \text{ 时}.$$

因此当 $\beta''<\beta_0$ 时有

$$A_1\cap B_{\beta'}=A_1\cap B_{\beta''}=E,$$

而当 $\beta_0<\beta'$ 时有

$$A_1\cap B_{\beta'}=A_1\cap B_{\beta''}=A_1.$$

设对 $n-1$ 引理已证明了. 若 $\beta''<\beta_n$, 则依(1)

$$A_{n+1}\cap B_{\beta'}\subseteq A_n, \quad A_{n+1}\cap B_{\beta''}\subseteq A_n,$$

由之

$$A_{n+1}\cap B_{\beta'}=A_n\cap B_{\beta'}, \quad A_{n+1}\cap B_{\beta''}=A_n\cap B_{\beta''}.$$

但是由归纳假设和引理的条件知这些等式的右侧是相同的. 若是 $\beta_n<\beta'$, 我们由 $A_{n+1}\cap B_{\beta''}$ 中任取一个元素 $x$. 由(2)可把它记成 $x=yz$, 其中

$$y\in A_n \quad z\in(A_{n+1}\cap B_{\beta'}).$$

由之得

$$y=xz^{-1}\in B_{\beta''},$$

亦即

$$y\in(A_n\cap B_{\beta''}).$$

依归纳假设, 有

$$A_n\cap B_{\beta''}=A_n\cap B_{\beta'}$$

故 $y\in B_{\beta'}$, 由之

$$x\in(A_{n+1}\cap B_{\beta'})$$

而这正是要证的.

现在回头来证明定理．设对给定的 $n$ 足标 $\beta_n+1$ 不存在．此时 $B_{\beta_n}$ 将是所有 $B_{\beta'}$，$\beta'>\beta_n$ 之交，因为不然的话这个交就可放入系 $\mathfrak{B}$ 内，这与 $\mathfrak{B}$ 是主系相矛盾．若足标 $\beta_k$ 是所有大于 $\beta_n$ 的足标 $\beta_i$，$i<n$，中的最小者(如果这样的足标要是存在的话)，则由引理对所有满足 $\beta_n<\beta'<\beta_k$ 的足标 $\beta'$(如果 $\beta_k$ 不存在的话，这就是对所有满足 $\beta_n<\beta'$ 的足标 $\beta'$)诸交 $A_{n+1}\cap B_{\beta'}$ 之间彼此相等．随之，它们也等于 $A_{n+1}$ 和所有 $B_{\beta'}$ 之交的交，即是等于交 $A_{n+1}\cap B_{\beta_n}$．但是这与(1)和(2)是矛盾的．定理证完．

有一些例子(参看 Курош[14])，它们说明，在此定理的陈述中不能只假设 $\mathfrak{A}$ 是任意的递增主列，也不能把主列和主系换成合成的．另一方面，可应用此定理的那些群可以具有形式很复杂的主系．例如，看一下可数个 2 阶循环群的直积．显然，这个群有递增主列，其序型和自然数的一样．另一方面，用有理数来把其直被加项进行编号并在有理数系中作所有可能的分割，而在有理分割的情形约定把相应的有理数归属第二类．对每一分割取编号属于此分割的第一类的那些直被加项的和，并把这样取到的子群系完备化，我们便得到一有连续统势的主系，它具有完全处处间断集的序型，并且在此系中的桥与有理分割相对应着．(参看补充 2.5)

# 第十四章　可　解　群

## §57. 可解群和广义可解群

现在我们转入研究一类非常广泛的群，特别，所有阿贝尔群都属于此类. 此类群的意义在历史上已由它与用根式解方程问题的联系而被确定了.

群的有限正规列或不变列叫作*可解列*，如果所有它的因子是阿贝尔群. 群$G$叫作*可解的*，如果它满足下列条件之一，而它们的等价性下面就来证明：

1) 群$G$具有有限可解正规列.

2) 群$G$具有有限可解不变列.

3) 群$G$的换位子群降链(参看§14) 经有限步后中断在单位群上.

显然由2)可得1). 其次，由3)可得2)，这是因为，换位子群的降链，如果它在有限位置达到单位群，那就成为一个*换位子群列*，它当然是有限可解不变列.

今证，由1)可得3). 设$K^{(i)}$是群$G$的第$i$换位子群并设$G$有有限可解正规列

$$G=H_0\supset H_1\supset H_2\supset\cdots\supset H_n=E.$$

由商群$G/H_1$的交换性得$H_1\supset K'$. 设已证得$H_i\supseteq K^{(i)}$. 由商群$H_i/H_{i+1}$的交换性得$H_{i+1}$包含群$H_i$的换位子群，更不用说群$K^{(i)}$的换位子群了，即有$H_{i+1}\supseteq K^{(i+1)}$. 由$H_n=E$便得$K^{(n)}=E$.

因为可解列的加密本身也是可解的，故依 Schreier 定理，*可解群的任一正规列可加密成可解列，因此可解群的任一正规子群*

必可出现在某个可解列中. 由之便得，可解群的任意商群本身也是可解的. 另一方面，在§16中曾证过下面定理：若在某个群中给一正规列，则在此群的子群中可找到一个正规列，它的因子与所给列的因子的子群同构. 把这个定理应用到可解列便得到，可解群的任意子群本身也是可解群.

可解群$A$借助可解群$B$所得的扩张$G$也是可解群.

事实上，取群$A$的可解列，并把与群$B$的一个可解列中的子群相应的$G$的子群添补上去，扩充而成$G$的正规列，后者就是群$G$的可解列.

由之便得，具有带可解因子的有限正规列的群是可解的. 特别，有限多个可解群的直积是可解的. 但对无限个可解群的直积相应的命题已不成立.

最后提一下，非阿贝尔单群是非可解群的最简单的例子.

**有限可解群**. 若可解群$G$是有限的，则其可解列可加密为合成列. 有限可解群的合成因子都是阿贝尔单群，即素数阶的循环群. 有限可解群的这个性质可作为它的定义. 并且任意具有合成列的可解群都是有限的，这是因为任意阿贝尔单群是有限的.

与有限阿贝尔群不同，有限可解群组成一个很广的群类，现在还没能完全刻划它. 除此以外，下面这个等价于Burnside关于有限单群问题(参看§61)的问题仍是没有解决的：奇数阶有限群是可解的吗[1]？

任意有限$p$-群都是可解的，其中$p$为任意素数.

事实上，若$G$是有限$p$-群，则由§54我们知道，它的中心$Z$异于$E$. 商群$G/Z$仍是有限$p$-群，但已有较小的阶. 认定阶较群$G$的阶为小的$p$-群，我们的定理已成立，则得群$G$是阿贝尔群$Z$借助于可解群$G/Z$的扩张，随之是可解的.

---

1) 在准备本书第三版的时候，此问题已得到解决(见补充之引言).

广义可解群. 群的可解列的概念容易推广到可解正规系和可解不变系，即是带阿贝尔因子的正规或不变系. 这使得我们可引入下面非常广泛的可解群的推广.

群$G$叫作$RN$-群，如果它具有可解正规系；叫作$RI$-群，如果它具有可解不变系. 关于这两类群是否重合的问题暂时没有解决[1].

可解和有限可解群定义的其他形式也能作相应的推广，并且按这个路子得到的群类已经不再是重合的. $RN$-群类在这里是最广泛的. 现在我们指出这些群类以及它们的一些性质，其进一步的细节请看 Курош 和 Черников[1].

应用换位子群列所给出的可解群定义可引出$RK$-群的概念，即是指这样的群，它们的换位子群降链，虽然可能是超限的走下去，但是终结在单位子群上. $RK$-群属于$RI$-群，因此也属于$RN$-群类中.

如在 § 36 中说明过的，自由群是$RK$-群，而因为任意群都可表成自由群的商群，故$RK$-群的商群(以及$RI$-和$RN$-群的商群)可以不再属于相应的群类. 相反地，$RK$-，$RI$-和$RN$-群的子群本身仍具有相应性质. 这一点对$RK$-群是显然的，而对$RI$-和$RN$-群可由上节中证过的关于子群的定理得出.

顺序较$RN$-和$RI$-群类更窄的是$\overline{RN}$-和$\overline{RI}$-群，即是这样的群，它们的任意合成(相应地，主)系都是可解的. 这些群类对于取商群是封闭的. 因为，设群$G$是$\overline{RI}$-群并设在商群$G/H$中给定一个任意主系. 它对应着群$G$中经过$H$的一个不变系. 将后者加密成主系，并注意到它应是可解的，转到商群$G/H$中，我们就证明了此商群中原给主系的可解性.

1) 在准备本书第三版时，此问题已解决(见补充 23.1).

与$\overline{RI}$-群相近的，也许和它是重合[1]的一类群在Шмидт[7]中讨论过，是指这样的群，它们的任意子群的任意商群都是$RI$-群.

最后我们指出和可解群最接近的广义可解群类——$RN^*$-群和$RI^*$-群类. 这是具有可解递增正规列及相应地可解递增不变列的群.

*$RN^*$-群类和$RI^*$-群类对于取子群是封闭的*，这可由关于子群的定理（参看§56）得出. *它们关于取商群也是封闭的.* 事实上，设在具可解递增正规(或不变)列$\mathfrak{A}$的群$G$中给出一个正规子群$H$. 对列$\mathfrak{A}$和正规(还是不变)列

$$E\subset H\subset G \tag{1}$$

应用§56中关于存在同构加密的定理，注意到这些加密仍是递增正规(或不变)列，这样我们便把列(1)加密成可解(或不变)列.

*任意$RI^*$-群都是$\overline{RI}$-群.* 事实上，若$\mathfrak{A}$是群$G$的可解递增不变列，而$\mathfrak{B}$是此群的任意不变系，则依§56中的一个定理，这些系有不变加密$\widetilde{\mathfrak{A}}$和$\widetilde{\mathfrak{B}}$，且系$\widetilde{\mathfrak{B}}$的因子系是系$\widetilde{\mathfrak{A}}$的因子系的一部分. 作为可解列的加密，系$\widetilde{\mathfrak{A}}$是可解的，因此系$\widetilde{\mathfrak{B}}$也是可解的. 由之得群$G$的所有主系都是可解的.

类似方法可以证明，*任意$RN^*$-群是$\overline{RN}$-群.* 对于这两类群有个问题尚未解决：它们是否实际上是相等的[2].

## §58. 局部定理. 局部可解群

对于广义可解群有下面的Мальцев*局部定理*（参看Мальцев[3]，Курош和Черников[1]）.

*任意局部地具有性质$RN$，$RI$，$\overline{RN}$或$\overline{RI}$的群本身相应地是*

---

1）在准备本书第三版时，这个问题已得到解决(参见补充23.1).

2）在准备本书第三版时，此问题已得到解决(见补充23.1).

$RN$-群, $RI$-群, $\overline{RN}$-群或 $\overline{RI}$-群.

对定理中的四个结论将分别证明.

**对于 $RN$-群的局部定理的证明.** 设在群 $G$ 中给定一子群的局部系 $L$, 并设此系的所有子群 $A^{\alpha}$, $A^{\beta}$, …都是 $RN$-群. 在 $L$ 中的每一子群 $A^{\alpha}$ 内取定某个确定的可解正规系 $\mathfrak{S}^{\alpha}$.

设 $a$ 和 $b$ 是群 $G$ 的两个任意元素. 对于使子群 $A^{\alpha}$ 包含此二元素的每一 $\alpha$, 在 $\mathfrak{S}^{\alpha}$ 中存在至少不包含元素 $a, b$ 中之一的一个最大子群; 将用 $C^{\alpha}_{a,b}$ 来表示这个子群. 若 $\overline{C}^{\alpha}_{a,b}$ 是系 $\mathfrak{S}^{\alpha}$ 中包含元素 $a, b$ 的子群中的最小者, 则子群 $C^{\alpha}_{a,b}$, $\overline{C}^{\alpha}_{a,b}$ 组成系 $\mathfrak{S}^{\alpha}$ 中具阿贝尔因子的一个桥, 因而换位子 $[a, b]$ 显然属于 $C^{\alpha}_{a,b}$.

系 $L$ 中含有元素 $a, b$ 的所有子群 $A^{\alpha}$ 必属于下面三类中之一: 相应的子群 $C^{\alpha}_{a,b}$ 或含 $a$ 而不含 $b$, 或者含 $b$ 不含 $a$, 或者不含 $a$ 也不含 $b$. *这三类中至少有一类是群 $G$ 的局部子群系.*

事实上, 假设对这三类中的每一类都可指出, 群 $G$ 中或者有这样的"矛盾"元素, 它不属于此类中的任一个子群, 或者有这样的"矛盾"子群对, 它们属于这个类但不同属于此类的任一第三个子群. 依局部子群系的定义在 $L$ 中可以找到这样的子群 $A^{\alpha}$, 它既包含 $a$, $b$, 也包含上面指出的所有这三类的"矛盾"元素和子群. 然而, 子群 $A^{\alpha}$ 应属于上面考察的三类中之一, 这样就得出矛盾.

用上法得到的任意局部子群系将称之为*与元素对 $(a, b)$ 相关联的局部系*; 这样的局部系可能有一个, 两个或三个[1].

今取两个元素对 $(c, d)$ 和 $(c', d')$. 系 $L$ 中包含所有这些元素的任意子群 $A^{\alpha}$ 至少属于下面两类中之一: 或者

$$C^{\alpha}_{c,d} \subseteq C^{\alpha}_{c',d'}$$

或者

---

1) Ю. И. Мерзляков 写信给本书第三版的编辑说, 在证明中可以不引进与元素对 $(a, b)$ 相关联的局部系, 而代之以包含元素 $a, b$ 的所有子群系.

$$C^{\alpha}_{c,d} \supseteq C^{\alpha}_{c',d'}.$$

和上面一样可以证明，这两类中至少有一个是群 $G$ 的局部子群系．这将叫作与 $(c, d)$ 和 $(c', d')$ 相关联的局部系(可能有一个或两个)．

一些局部系的交指属于每一给定局部系的子群组成的系．若给出有限多个对 $(a_i, b_i)$, $i=1, 2, \cdots, n$ 和有限多组偶对 $(c_j, d_j)$, $(c'_j, d'_j)$, $j=1,2,\cdots,s$，则由与给定的每一对和每一偶对相关联的那些局部系中至少有一种方式可各选出一个来，使得它们的交仍是群 $G$ 的局部子群系．

事实上，假设对其总数仅为有限的这些交中的每一个可以找到在前述意义下的“矛盾”元素或“矛盾”子群对．今对每一对 $(a_i, b_i)$ 以及每一偶对 $(c_i, d_i)$，$(c'_i, d'_i)$ 所确定的那些类中，凡不是与这些对或偶对相关联的局部系，也选出“矛盾”元素或“矛盾”子群对．但在系 $L$ 中存在有子群 $A^{\alpha}$，它既包含上面所列举的“矛盾”元素和子群，也包含给定的元素对与偶对中的所有元素．对于这些元素对或偶对中的每一个来说，子群 $A^{\alpha}$ 显然都属于与此对或偶对相关联的局部系中的一个，随之也属于这些局部系的交中．但是这和子群 $A^{\alpha}$ 包含有与此交相“矛盾”的元素或子群对这一假设是相矛盾的．

在这个结果的基础上，我们来证明，对于任意对 $(a, b)$ 和任意偶对 $(c, d)$，$(c', d')$ 可以各选出群 $G$ 中的一个与它们相关联的局部系——把这局部系顺序记作 $L_{(a,b)}$ 和 $L_{(c,d),(c',d')}$——使得选出局部系中任意有限多个之交，仍是群 $G$ 的局部子群系．

为了证明，将认定所有对和所有偶对之集 $\mathfrak{M}$ 是良序的并对此集作归纳法来证明．今取集 $\mathfrak{M}$ 中的第 $\alpha$ 元素并设(当 $\alpha>1$ 时)对所有前面的元素已各标定一个与之关联的局部系且满足以下条件：对任意有限个标定系 $L', L'', \cdots, L^{(k)}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中任意有限个元素，例如说第 $\alpha'$，第 $\alpha''$，…，第 $\alpha^{(l)}$ 元素，可选取与后面这些元素关

联的局部系 $L_0^{(\alpha')}, L_0^{(\alpha'')}, \cdots, L_0^{(\alpha^{(l)})}$, 使得局部系

$$L', L'', \cdots, L^{(k)}, L_0^{(\alpha')}, L_0^{(\alpha'')}, \cdots, L_0^{(\alpha^{(l)})}$$

之交本身也是群 $G$ 的局部子群系. 此时对 $\mathfrak{M}$ 的第 $\alpha$ 元素也可由与之关联的那有限个局部系中标定一个，而使刚说过的标定局部系的性质仍能保留. 这是因为，若对与第 $\alpha$ 元素关联的局部系中每一个，都有一个由标定局部系和 $\mathfrak{M}$ 中元素组成的"矛盾"有限集，则取所有这些有限集之并，再加上第 $\alpha$ 元素本身，便将引到与归纳法假设相矛盾.

所有局部系 $L_{(a,b)}$ 和 $L_{(c,d),(c',d')}$ 的集将用 $\mathfrak{C}$ 记之.

现在我们转来构造群 $G$ 的可解正规系. 取任意元素对 $(a, b)$ 并依下法定义群 $G$ 的子群 $H_{a,b}$.

1. 取局部系 $L_{(a,b)}$ 和集 $\mathfrak{C}$ 中任意有限个其他局部系之交，我们知道它是一个局部系.

2. 对属于 1. 中得到的局部系的所有 $A^\alpha$ 的子群 $C^\alpha_{a,b}$，取它们的交.

3. 对固定对 $(a, b)$，但对 1. 中构造的不同的局部系依 2. 得到的所有交，我们取它们的并，而将此并记作 $H_{a,b}$.

$H_{a,b}$ 实际上是一个子群，因为 2. 中所谈到的任意两个交都含在某一这种类型的第三个交中.

子群 $H_{a,b}$ 或者只含有元素 $a, b$ 中的一个，或者是一个也不包含；但它永远含有这些元素的换位子 $[a, b]$. 这是因为对于在局部系 $L_{(a,b)}$ 中的所有 $A_\alpha$ 所取的子群 $C^\alpha_{a,b}$ 都具有这个性质.

对所有对 $(a, b)$ 构造的子群 $H_{a,b}$ 之集 $\mathfrak{H}$ 依集论中的包含关系是有序的. 事实上，取子群 $H_{a,b}$ 和 $H_{c,d}$. 依局部系 $L_{(a,b),(c,d)}$ 的定义，对于在此系中的所有子群 $A^\alpha$，两种可能包含关系，$C^\alpha_{a,b} \subseteq C^\alpha_{c,d}$ 或 $C^\alpha_{a,b} \supseteq C^\alpha_{c,d}$，中只有一种成立；设是第一个成立. 若对 1. 中所说的那些局部系再加上一个系 $L_{(a,b),(c,d)}$，则子群 $H_{a,b}$ 的定义中的

2. 所说的交只能增大，由于这个原故，所以有

$$H_{a,b}\subseteq H_{c,d}.$$

由有序子群系 $\mathfrak{S}$ 去掉所有重复者并把它的所有子集的交和并添加上去，便得完备的有序子群集 $\overline{\mathfrak{S}}$.

子群 $E$ 属于系 $\overline{\mathfrak{S}}$，这是因为，若 $a$ 是群 $G$ 中异于单位的元素，则子群 $H_{1,a}$ 显然含有单位元素，因而必不含 $a$. 因此系 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中所有子群之交等于 $E$.

因为系 $\mathfrak{S}$ 中所有子群之并 $G'$ 可能异于 $G$，故不能证明群 $G$ 本身属于系 $\overline{\mathfrak{S}}$. 但无论如何，若任取 $G$ 中两个元素 $a,b$，我们知道这时此二元素的换位子 $[a, b]$ 属于子群 $H_{a,b}$，因而也属于 $G'$. 随之，为了证明定理剩下来要说明的只是，完备系 $\overline{\mathfrak{S}}$ 是群 $G'$ 的可解正规系.

系 $\overline{\mathfrak{S}}$ 是正规的，事实上，取此系中任意一个桥 $\overline{H}_{\beta}, \overline{H}_{\beta+1}$. 若元素 $a,b$ 有性质：

$$a\in\overline{H}_{\beta},\quad b\in\overline{H}_{\beta+1},\quad b\notin\overline{H}_{\beta},$$

则有 $H_{a,b}\subseteq\overline{H}_{\beta}$，因为不然的话，作为属于 $\overline{\mathfrak{S}}$ 中的子群，$H_{a,b}$ 该包含子群 $\overline{H}_{\beta+1}$，因而将含有 $a,b$ 这两个元素. 但因为换位子 $[a, b]$ 属于 $H_{a,b}$，故它也属于 $\overline{H}_{\beta}$，因而由 $a\in\overline{H}_{\beta}$ 知元素 $b^{-1}ab$ 也在 $\overline{H}_{\beta}$ 中. 这就证明了 $\overline{H}_{\beta}$ 是 $\overline{H}_{\beta+1}$ 中的正规子群.

系 $\overline{\mathfrak{S}}$ 是可解的. 事实上，设在此系中存在一个桥 $\overline{H}_{\beta}, \overline{H}_{\beta+1}$ 具非阿贝尔因子. 这就是说，在子群 $\overline{H}_{\beta+1}$ 中可以找到元素 $a, b$，它们本身以及它们的换位子不在 $\overline{H}_{\beta}$ 内. 但这是不可能的，因为子群 $H_{a,b}$ 含有元素 $[a, b]$ 而另一方面它不能含有 $a, b$ 这两个元素，随之它本身含在 $\overline{H}_{\beta}$ 中，由之得 $[a, b]\in\overline{H}_{\beta}$. 定理证完.

**对于 $RI$-群的局部定理的证明** 可同样地进行. 需要证一下的只是，任意子群 $H_{a,b}$ 都是群 $G$ 的正规子群.

设 $c$ 是子群 $H_{a,b}$ 中的任意元素，$d$ 是群 $G$ 中任意元素. 子群

$H_{a,b}$ 的定义说明，元素 $c$ 含在子群 $C^{\alpha}_{a,b}$ 的交中，其中子群 $C^{\alpha}_{a,b}$ 是对属于局部系 $L_{(a,b)}$ 与集 $\mathfrak{C}$ 中某有限个其他局部系之交中的所有 $A^{\alpha}$ 取得的. 我们知道，此时可认定系 $L_{(a,b),(c,d)}$ 也在这些局部系之中. 因此所有这些 $A^{\alpha}$ 都含元素 $d$，又因为 $C^{\alpha}_{a,b}$ 现在是 $A^{\alpha}$ 中的正规子群，故所有涉及到的子群 $C^{\alpha}_{a,b}$，随之它们的交也含元素 $d^{-1}cd$. 这样，此元素属于 $H_{a,b}$ 中，而这也就是要证明的.

**对于 $\overline{RI}$-群的局部定理的证明.** 设在群 $G$ 中给出一个局部子群系 $L$ 并设此系的所有子群 $A^{\alpha}$ 都是 $\overline{RI}$-子群. 由于任一不变系都可加密成主系，故为了证明定理，只需证明下面命题：

*若在我们这个群 $G$ 中给出正规子群 $B_1$ 和 $B_2$，且 $B_1$ 含在 $B_2$ 中而商群 $B_2/B_1$ 是非交换的，则介于 $B_1$ 和 $B_2$ 之间存在群 $G$ 的一个异于它们的正规子群.*

从商群 $B_2/B_1$ 的非交换性可得在 $B_2$ 中存在有两个元素 $x$ 和 $y$，它们本身以及它们的换位子都不在子群 $B_1$ 中. 若 $A^{\alpha}$ 是局部系 $L$ 中含 $x, y$ 的任意子群，则交

$$B_1^{\alpha}=A^{\alpha}\cap B_1 \qquad B_2^{\alpha}=A^{\alpha}\cap B_2$$

是 $A^{\alpha}$ 中的正规子群，且 $B_1^{\alpha}$ 含在 $B_2^{\alpha}$ 中并异于它，因为元素 $x, y$ 和 $[x, y]$ 属于 $B_2^{\alpha}$，但不属于 $B_1^{\alpha}$.

因为 $A^{\alpha}$ 是 $\overline{RI}$-群，故其不变系

$$E\subseteq B_1^{\alpha}\subseteq B_2^{\alpha}\subseteq A^{\alpha}$$

可加密成可解主系. 取这种加密中的一个. 在其中必可找到桥 $C^{\alpha}, \overline{C}^{\alpha}$，这里 $\overline{C}^{\alpha}$ 含有这两个元素 $x, y$，而 $C^{\alpha}$ 至少不含它们中的一个而由商群 $\overline{C}^{\alpha}/C^{\alpha}$ 的交换性却含换位子 $[x, y]$. 这样

$$B_1^{\alpha}\subset C^{\alpha}\subset\overline{C}^{\alpha}\subseteq B_2^{\alpha}.$$

下面将认定，在局部系 $L$ 中每一个含元素 $x$，$y$ 的子群 $A^{\alpha}$ 内都按上述方式构造一个正规子群 $C^{\alpha}$. 此时所有这些子群 $A^{\alpha}$ 被划分成以下三类：相应的正规子群 $C^{\alpha}$ 或者含 $x$ 但不含 $y$，或者含 $y$

但不含 $x$，或不含 $x$ 也不含 $y$. 和在前面定理的证明中一样，可以证明，此三类中至少有一个是群 $G$ 的局部子群系. 取定这些局部系中的一个并用 $L'$ 表之，且在下面我们将只利用属于 $L'$ 中的子群 $A^{\alpha}$.

用 $C$ 表示群 $G$ 中所有具下面性质的元素 $z$ 的全体：在局部系 $L'$ 中可找到一子群 $A^{\alpha}$，使得对于 $L'$ 中包含 $A^{\alpha}$ 的任意子群 $A^{\alpha'}$，元素 $z$ 含在正规子群 $C^{\alpha'}$ 中.

集 $C$ 是群 $G$ 的子群. 事实上，若元素 $z_1$ 和 $z_2$ 属于集 $C$，则在局部系 $L'$ 中有子群 $A^{\alpha_1}$ 和 $A^{\alpha_2}$，使得元素 $z_i$，$i=1,2$，含在对 $L'$ 中含 $A^{\alpha_i}$ 的任意子群 $A^{\alpha}$ 所构造的那些 $C^{\alpha}$ 中. 但在 $L'$ 中存在子群 $A^{\alpha_3}$，它包含这两个子群 $A^{\alpha_1}$，$A^{\alpha_2}$. 这样，对于 $L'$ 中含 $A^{\alpha_3}$ 的任意子群 $A^{\alpha}$，其正规子群 $C^{\alpha}$ 将要含有此二元素 $z_1, z_2$，因而也含它们的乘积，以及它们中每一个的逆元.

子群 $C$ 是群 $G$ 的正规子群. 事实上，设 $z\in C$, $g\in G$. 若 $A^{\alpha}$ 是 $L'$ 中一个子群，使得对任意含 $A^{\alpha}$ 的子群 $A^{\alpha'}$，元素 $z$ 都在 $C^{\alpha'}$ 中，且若 $A^{\alpha_1}$ 是 $L'$ 中含 $A^{\alpha}$ 和元素 $g$ 的子群，则对任意含 $A^{\alpha_1}$ 的子群 $A^{\alpha_1'}$，其正规子群 $C^{\alpha_1'}$ 将不仅含有 $z$，也含有 $g^{-1}zg$，因而 $g^{-1}zg\in C$.

正规子群 $C$ 介于 $B_1$ 和 $B_2$ 之间. 事实上，若元素 $b$ 属于 $B_1$ 且若 $b$ 属于局部系 $L'$ 中的子群 $A^{\alpha}$，因而也在所有含 $A^{\alpha}$ 的子群 $A^{\alpha'}$ 中，则对所有这些 $\alpha'$，它也属于 $B_1^{\alpha'}$ 中，随之也在 $C^{\alpha'}$ 中. 这就证明了 $b\in C$. 另一方面，若元素 $z$ 属于 $C$，则存在有子群 $A^{\alpha}$，使得 $z\in C^{\alpha}\subset B_2^{\alpha}$，即 $z\in B_2^{\alpha}$.

正规子群 $C$ 异于 $B_1$ 和 $B_2$. 为了证明，需要对在选择局部系 $L'$ 时可能出现的三种情形分别讨论. 若此系是由第一类子群 $A^{\alpha}$，也就是其相应正规子群 $C^{\alpha}$ 含 $x$ 但不含 $y$ 的那些 $A^{\alpha}$ 组成的，则正规子群 $C$ 也含有 $x$，这说明它异于 $B_1$，$C$ 也不含 $y$，而这说明它异于 $B_2$. 对于局部系 $L'$ 是由第二类子群 $A^{\alpha}$ 组成的情形类似的讨论也

是适用的. 若是 $L'$ 是由第三类子群 $A^\alpha$ 组成，亦即由其相应的 $C^\alpha$ 不含 $x$ 和 $y$，但含换位子$[x,y]$的 $A^\alpha$ 组成的，则正规子群 $C$ 也不含 $x$ 和 $y$，这说明它异于 $B_2$，但 $C$ 也含换位子$[x,y]$，这说明它异于 $B_1$. 定理证完.

**对于$\overline{RN}$-群的局部定理的证明.** 需要把前面几个定理的证明中所使用的方法综合起来，我们把它略去.

对于 $RN^*$-群的局部定理是否成立还没有解决[1]. 另一方面，对于 $RI^*$-群和 $RK$-群不能证明局部定理，这可由有不含阿贝尔正规子群的局部有限 $p$-群的例子(Шмидт[7])以及与自己的换位子群重合的局部有限 $p$-群的例子(Адо[1]，Шмидт[7])来说明.

容易理解，对可解群，局部定理是不成立的. 这就引出下面重要的广义可解群类：群 $G$ 叫作*局部可解的*，如果它有一个由可解子群组成的局部系. 因为可解群的子群本身也是可解群，故这个定义等价于要求群 $G$ 中任一由有限个元素生成的子群是可解的[2].

显然，*局部可解群属于任意有局部定理的广义可解群类*. 一般说，$RN^*$-，$\overline{RN}$-，$\overline{RI}$-群类和局部可解群类，以及在 Шмидт[7] 中研究过的群类，它们彼此是很接近的. 精确地弄清存在于它们之间的关系该是有趣的. (见补充 23).

## §59. 附加有限条件

在上面研究过的广义可解群类之间会出现一些新的关系，若是补充要求这些群满这样或那样的有限条件(参看 §53). 现在来介绍这种性质的一些结果.

*在局部有限性条件下，所有有局部定理的广义可解群都是局*

1) 在准备本书第三版时，此问题已解决(见补充 23.1).

2) 在局部可解群的定义中不要求这些群的局部有限性.

部可解群，随之它们彼此相等.

事实上，若$G$是局部有限$RN$-群，则所有它的有限子群是可解群，因而是局部可解的.

这里提一下，对于$RN$-群Burnside关于周期群的问题还没有解决. 已经证明的只是下面定理(Черников[4]，Baer[24]；关于证明参看Шмидт[7]).

任意周期$RN^*$-群是局部有限的.

这是因为，我们知道周期阿贝尔群是局部有限的，局部有限群借助局部有限群的扩张是局部有限的(参看§53)，且局部有限群升链之并也是局部有限的，由这些结果便直接可得这个定理.

由此定理可得周期可解群的局部有限性，因之也有周期局部可解群的局部有限性.

下面来证明定理(Черников[7])：

任意$RI$-群(特别，任意可解群)，若它具有有限多个共轭元素系，则是有限群.

事实上，具有有限个共轭元素系的任意群显然不能有无限不变系，因而我们所考虑的这个$RI$-群$G$是可解的. 设

$$E\subset H_1\subset\cdots\subset H_{k-1}\subset H_k=G \tag{1}$$

是群$G$的任一可解正规列. 作为具有限个共轭元素系的群的商群，因子$G/H_{k-1}$也具有限个共轭元素系. 它又是阿贝尔的，故$G/H_{k-1}$就是一个有限群.

今证，群$H_{k-1}$具有限个共轭元素系. 若不是这样，则在$H_{k-1}$中可找到无限多个元素

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

它们在群$H_{k-1}$中两两互不共轭，但在群$G$中所有都是相互共轭的，即是在一个系中. 随之，在$G$中存在这样一些元素$x_i$，使

$$x_i^{-1}a_ix_i=a_1 \qquad i=2,3,\cdots \tag{2}$$

由于商群 $G/H_{k-1}$ 是有限的，故有足标 $i, j$，有 $i \neq j$ 且

$$x_i H_{k-1} = x_j H_{k-1},$$

由之有

$$x_j = x_i h_{k-1},\ h_{k-1} \in H_{k-1}. \tag{3}$$

由(2)和(3)得

$$a_i = (x_i h_{k-1} x_i^{-1})^{-1} a_j (x_i h_{k-1} x_i^{-1}),$$

但因为元素 $x_i h_{k-1} x_i^{-1}$ 在正规子群 $H_{k-1}$ 中，则知元素 $a_i$ 和 $a_j$ 在 $H_{k-1}$ 中是共轭的，这与假设是矛盾的．

这样便可证明因子 $H_{k-1}/H_{k-2}$ 的有限性．继续作下去便得列(1)中所有因子的有限性．由此即得群 $G$ 的有限性．定理证完．

下面这个关于对子群有极小条件的可解群的 Черников[4, 5] 定理把刻划这些群的问题完全地归结为刻划有限可解群．

*任意对子群有极小条件的 $RN$-群是可解群．群 $G$ 是对子群有极小条件的可解群当且仅当它是有极小条件的完备阿贝尔群借助有限可解群的扩张．*

**证明**(参看 Шмидт[7])．设给定一个对子群有极小条件的 $RN$-群 $G$．由极小条件知群 $G$ 的任意可解正规系应是关于递增良序的，即 $G$ 是 $RN^*$-群．另一方面，由极小条件得群 $G$ 的周期性，而因此作为周期 $RN^*$-群，$G$ 还是局部有限的．但上面证过，在局部有限的条件下任意 $RN$-群都是 $RI$-群，所以 $G$ 是 $RI$-群，随之再依极小条件，它还是 $RI^*$-群．

在群 $G$ 中由于极小条件存在具有有限指数的极小子群 $F$，它已不含有限指数的子群．$F$ 将是唯一的这种子群，因为两个有限指数子群的交仍有有限指数．随之，$F$ 是 $G$ 中的正规子群．今证，群 $F$ 的中心 $Z$ 异于 $E$．

作为 $RI^*$-群的子群，$F$ 也是 $RI^*$-群，因此有异于 $E$ 的阿贝尔正规子群 $A$．由在 §53 中给出的关于极小条件阿贝尔群的刻划

可得，在 $A$ 中只含有限多个任一指定阶的元素，而因此，由于 $A$ 是正规子群，$A$ 中任一元素在 $F$ 中的正规化子在 $F$ 中有有限指数，亦即应和 $F$ 重合. 由之得 $A$ 在群 $F$ 的中心内，即 $A\subseteq Z$，所以 $Z\neq E$.

下面来证，$Z$ 与 $F$ 重合. 事实上，设 $Z\neq F$. 此时 $F/Z$，作为 $RI^*$-群的商群，本身也是 $RI^*$-群. 其次，它满足极小条件，和 $F$ 一样，它必不含有限指数真子群. 因此，对群 $F/Z$ 上一段中的讨论是适用的，即是此群应具有非平凡中心 $Z'/Z, Z'\neq Z$. 若 $z'$ 是 $Z'$ 中任意元素，则在群 $F$ 中任意与 $z'$ 共轭的元素 $z''$ 必含在陪集 $z'Z$ 中，即有形状

$$z''=z'z \qquad z\in Z.$$

因为元素 $z'$ 和 $z''$ 有相同的阶，而

$$zz'=z'z,$$

故元素 $z$ 的阶应是 $z'$ 的阶的因数. 这样的元素 $z$ 在有极小条件的阿贝尔群 $Z$ 中只有有限个，即元素 $z'$ 在群 $F$ 中只有有限个共轭元素. 由之得元素 $z'$ 在 $F$ 中的正规化子在 $F$ 中有有限指数，因而与 $F$ 重合，即 $z'\in Z$. 这和不等式 $Z'\neq Z$ 是矛盾的. 故证得等式 $Z=F$.

这样，$F$ 是群 $G$ 的阿贝尔正规子群. 作为有极小条件且不含有限指数真子群的阿贝尔群，群 $F$ 是完备的，因而依 § 53，可分解成有限多个关于某些素数 $p$ 的 $p^\infty$ 型群的直积.

其次，商群 $G/F$ 是有限的且同时是 $RI^*$-群，即为有限可解群. 因此群 $G$ 作为阿贝尔群借助可解群的扩张本身也是可解群.

为了结束证明，我们指出，任意有极小条件的阿贝尔群借助有限可解群的扩张也是可解的且(参看 § 53)对子群满足极小条件.

由 Черников 定理作为特殊情况可得，对子群有极小条件的任意可解群是可数群.

我们指出下面这个显然事实：可解群对子群满足极小条件当

且仅当它的所有可解正规列的所有因子是有极小条件的阿贝尔群.

其次,我们指出(参看 Шмидт[7], Черников[21]), 对于周期可解群以及某些更广一些的群类, 由对阿贝尔子群的极小条件可得出对所有子群的极小条件. 另一方面(参看 Чарин[1]), 对于周期可解群而言, 由关于正规子群的极小条件推不出对所有子群的极小条件.

关于对子群有极大条件的可解群暂时只得到不那么完善的结果. 研究这些群的有 Hirsch[1, 2, 4]和 Zappa[2, 4]. 在 Мальцев[10]中证明了,对于可解群而言, 由关于阿贝尔子群的极大条件可得对所有子群的极大条件. 现指出下面结果(Hirsch[1]).

*若可解群 $G$ 有可解正规列, 其所有因子是具有有限生成元的阿贝尔群, 则在 $G$ 中对子群有极大条件. 反之, 若在群 $G$ 中对子群有极大条件, 则此群的所有可解正规列的所有有因子具有有限生成元, 即这些列可加密成带循环因子的正规列.*

事实上,设群 $G$ 的可解列

$$G=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_{n-1}\supset G_n=E \tag{4}$$

的每一个因子具有有限生成元. 首先证明, $G$ 是具有有限生成元的群. 这个结论对群 $G_{n-1}=G_{n-1}/E$ 是对的. 若对 $G_i$ 已证其生成元个数的有限性, 则对 $G_{i-1}$ 它可如下来证明: 在商群 $G_{i-1}/G_i$ 中取有限生成元系并在组成此系的每一关于 $G_i$ 的陪集中各取一个代表. 所得的有限元素系与 $G_i$ 的生成元系合在一起生成整个群 $G_{i-1}$. 这就证明了, 所有群 $G_i$, 其中也有 $G_0=G$, 具有限生成元系.

这时若 $U$ 是群 $G$ 的任意子群, 则 $U$ 有正规列, 其因子和列(4)的那些因子中的子群同构, 即依 §20 又都是具有有限生成元的阿贝尔群. 由之得在群 $G$ 的任意子群内也有生成元个数的有限性, 再由 §53 中所说过的得到: $G$ 中子群的升链必中断.

逆命题是显然的：由可解群的子群升链必中断可得，此群的所有子群都是由有限个生成元生成的，因而这些子群的商群，其中也包括任意可解列的任意因子也都是由有限个生成元生成的。因而，这些因子中每一个都具有带循环因子的有限正规列。由之得定理的最后一个断语.

这个结果以及在上面提到的对有极小条件的可解群的类似结果指明，通过对群的可解列的因子加上这样或那样限制而得可解群的一些特殊类并对之加以研究是非常合情合理的. 例如，Мальцев[10] 得到一系列结果，它们涉及的是其可解列的所有因子都是有限秩阿贝尔群的可解群，还涉及某些更窄的可解群类；还可参看 Смирнов[1].

## § 60. 可解群的 SylowΠ-子群

设给定一 $n$ 阶有限群 $G$ 并设 $n$ 分解成两个互素因数的乘积，

$$n=kl, \qquad (k,l)=1.$$

用 Π 表示数 $k$ 的所有素因数的集. 显然，群 $G$ 的任意 Sylow Π-子群的阶都是 $k$ 的因数. 但它不一定等于 $k$ 且群 $G$ 可能根本就不含 $k$ 阶子群. 我们将在下面看到，在有限可解群的条件下情况不同了——*有限可解群的所有 SylowΠ-子群都有阶 $k$ 且所有它们彼此还是共轭的*. 我们先证明下面的 Hall 定理(参看 Ph. Hall [1]；其他证法见 Zassenhaus[2]和 Ore[9], Goheen[1])

*若 $k$ 是有限可解群 $G$ 的阶 $n$ 之因数且若*

$$n=kl, \qquad (k,l)=1, \tag{1}$$

*则群 $G$ 有阶为 $k$ 的子群且所有这些子群彼此间共轭.*(见下页注1)

再叙述 Hall 的一个定理. 先引入下面定义.

设 Π 是有限群 $G$ 的阶 $n$ 的某些(不一定是所有的)素因数的集合. 对 Π 中每一 $p$ 各取群 $G$ 的一个 Sylow $p$-子群 $P_p$，这些 $P_p$

的集合叫作群 $G$ 的 SylowΠ-基 $\mathfrak{G}$，如果下列条件被满足：若

$$P_{p_1}, P_{p_2}, \cdots, P_{p_r}$$

是 $\mathfrak{G}$ 中的某些子群，则由它们生成的子群

$$\{P_{p_1}, P_{p_2}, \cdots, P_{p_r}\}$$

中任意元素的阶都是素数 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 的非负幂的积.

若集合 $\Pi$ 是由群 $G$ 的阶之所有素因数组成的，则群 $G$ 的 SylowΠ-基叫作此群的完全 Sylow 基. 组成完全 Sylow 基的子群合在一起生成整个群 $G$.

群 $G$ 的两个 Sylow Π-基 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{G}_2$ 叫作共轭的，如果在 $G$ 中存在一个元素，用它去变形基 $\mathfrak{G}_1$ 中的所有子群，便把它们变到基 $\mathfrak{G}_2$ 中相应的子群上去.

若 $\Pi$ 是素数的任意集合，而 $\Pi_0$ 是其子集，是由 $\Pi$ 中所有那些素数组成，它们同时又是有限群 $G$ 之阶的因数，则对群 $G$ 的 Sylow Π-基这一术语就理解为它的 Sylow $\Pi_0$-基.

有下面的 Ph. Hall[6] 定理.

任意有限可解群具有完全 Sylow 基且所有这些基彼此共轭[2].

我们将从一些更一般的定理推出 Hall 的这两个定理. 令 $\Pi$ 为任意非空素数集合. 依照 С. А. Чунихин，称有限群 $G$ 是 Π-可离的，如果它具有正规列，其每一因子的阶最多只能用 $\Pi$ 中的一个素数整除. 特别，若 $\Pi$ 由所有素数组成或者乃至是由出现在群

---

1) 如 Ph. Hall[4] 和 Чунихин[1] 指出的，逆命题也成立，还可写成下面形式：若有限群 $G$，对其阶 $n$ 的所有使(1)成立且相应补因数 $l$ 是素数的幂的因数 $k$，具有 $k$ 阶子群，则群 $G$ 是可解的.

此断语的证明依赖于下面的 Burnside 定理，它是此断语的特殊情况：任意有限群，其阶只含两个不同的素数，是可解的. 此最后一个定理的证明使用的方法超出本书范围，即用了有限群的特征标理论.

2) Hall 还证明下面的逆命题：若有限群有完全 Sylow 基，则它是可解的.

$G$ 之阶中的所有素数组成，则 $\Pi$-可离群 $G$ 就是可解群，因为它具有正规列，它的所有因子是 $p$-群. 反之，任意可解群在这样选取 $\Pi$ 时也是 $\Pi$-可离群. 若是出现第二种极端情形，当 $\Pi$ 只有一个素数组成，则任意有限群 $G$ 是 $\Pi$-可离的.

由 § 16 中证明的关于子群的定理得，$\Pi$-可离群的任意子群都是 $\Pi$-可离的.

有下面的 **Чуйхин[4, 6]定理**

*若 $k$ 是有限 $\Pi$-可离群 $G$ 之阶的因数且有*

$$n=kl, \qquad (k,l)=1$$

*以及 $k$ 的所有素因数都在 $\Pi$ 中，则 $G$ 具有 $k$ 阶子群，且所有这些子群在 $G$ 中共轭*[1].

若集合 $\Pi$ 由所有的素数组成，则这个定理变成上面指出的第一个 Hall 定理，而当 $\Pi$ 由一个素数 $p$ 组成，则它就变成在 § 54 中证过的 Sylow 定理的基本论断.

然而，我们将证明一个更一般的 Гольберг[3]定理

*若 $G$ 是有限 $\Pi$-可离群，而 $\Pi'$ 是集 $\Pi$ 的任意子集，则群 $G$ 具有 Sylow $\Pi'$-基且所有这些基彼此共轭.*

若集合 $\Pi$ 由群 $G$ 的阶之所有素因数组成且 $\Pi'=\Pi$，则这定理就变成上述第二个 Hall 定理. 今证，由它也可推得 Чунихин 定理.

设 $k$ 是 Чунихин 定理中所指出的数，如果 $\Pi'$ 是数 $k$ 的所有素因子的集合，则依 Гольберг 定理，群 $G$ 有 Sylow $\Pi'$-基 $\mathfrak{S}'$. 基 $\mathfrak{S}'$ 中所有子群生成的子群 $A$ 是 $k$ 阶的. 这是因为，此阶显然被 $k$ 整除，而子群 $A$ 中任意元素的阶是 $k$ 的因数. 若是现在 $A_1, A_2$ 为 $\Pi$-可离群 $G$ 的任意两个 $k$ 阶子群，则它们是 $\Pi'$-可离的(参看 § 16 中关于子群的定理)因而是可解的. 上面已经说过，由 Гольберг 定理可得第二个 Hall 定理，根据它可知，子群 $A_1$ 和 $A_2$ 有完

全 Sylow 基 $\mathfrak{S}_1'$ 和$\mathfrak{S}_2'$. 对于群 $G$ 言, 这就是 Sylow $\Pi'$-基, 依Гольберг 定理它们是共轭的, 因而由它们生成的子群 $A_1$ 和 $A_2$ 也是共轭的.

**Гольберг 定理的证明.** 不失一般性可认定集合 Π 中所有素数都整除有限 Π-可离群 $G$ 的阶, 并对群的阶作归纳法来证明定理. 设子集 $\Pi'$ 由素数

$$p_1, p_2, \cdots, p_k, \quad k \geqslant 1$$

组成. 若 $k=1$, 则定理的所有结论可由 Sylow 定理得出, 故可设 $k>1$.

此时 Π 至少含有两个素数, 因此依 Π-可离群的定义知在 $G$ 中存在非平凡正规子群 H, 它在 $G$ 中的指数被 Π 中不多于一个素数整除. 若这个指数不被 $\Pi'$ 中任一素数整除, 则依归纳假设而存在的. 群 $H$ 的 Sylow $\Pi'$-基也是群 $G$ 的 Sylow $\Pi'$-基. 另一方面, 群 $G$ 的任意 Sylow $\Pi'$-基必也含在 $H$ 中, 因而再依归纳法假设知这些基在 $H$ 中是共轭的.

今设正规子群 $H$ 在 $G$ 中的指数被 $\Pi'$ 中的 $p_1$ 整除. 令 $p_1^{\alpha_1}$ 和 $p_1^{\alpha_1'}$ 是顺序出现在群 $G$ 和 $H$ 的阶中 $p_1$ 的最高次幂:

$$\alpha_1 > \alpha_1' \geqslant 0.$$

依假设群 $H$ 有 Sylow $\Pi'$-基

$$P_1', P_2, \cdots, P_k, \tag{2}$$

其中 $P_i, i=2, 3, \cdots, k$ 是群 $G$ 的Sylow $p_i$-子群, 而 $P_1'$ 有阶 $p_1^{\alpha_1'}$. 用 $N(G)$ 和 $N(H)$ 表示子群(2)在集论意义下的并依次在 $G$ 和在 $H$ 中的正规化子. 因为 $H$ 是群 $G$ 的正规子群而群 $H$ 的所有Sylow$\Pi'$-基彼此共轭, 故这些正规化子顺序在 $G$ 和在 $H$ 中的指数应当相等; 设它们被 $p_1^{\beta}, \beta \geqslant 0$, 整除.

交 $P_1' \cap N(H)$ 是 $N(H)$ 中的 Sylow $p_1$-子群, 因为不然的话 $P_1'$ 也就不是 $H$ 中的 Sylow $p_1$-子群. 因此, 这个交的阶是 $p_1^{\alpha_1'-\beta}$. 把

此交扩充成群 $N(G)$ 的 Sylow $p_1$-子群 $P_1''$；它的阶是 $p_1^{\alpha_1-\beta}$. 因为

$$P_1' P_1'' = P_1'' P_1,$$

故子群 $P_1 = P_1' P_1''$ 是 $p_1$-子群. 其阶等于

$$p_1^{\alpha_1' + (\alpha_1 - \beta) - (\alpha_1' - \beta)} = p_1^{\alpha_1},$$

即这是群 $G$ 的一个 Sylow $p_1$-子群. 最后, 因为 $P_i P_1'' = P_1'' P_i$, $i = 2, 3, \cdots, k$, 则子群系

$$P_1, P_2, \cdots, P_k \tag{3}$$

是群 $G$ 的 Sylow $\Pi'$-基.

今设在 $G$ 中给了两个 Sylow $\Pi'$-基, (3) 以及

$$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k. \tag{4}$$

交 $P_1 \cap H$ 和 $Q_1 \cap H$ 是群 $H$ 中的 Sylow $p_1$-子群, 因此, 易证

$$P_1 \cap H, P_2, \cdots, P_k; \quad Q_1 \cap H, Q_2, \cdots, Q_k$$

是 $H$ 中的 Sylow $\Pi'$-基. 依假设, 它们在 $H$ 中共轭. 设这些基中的第二个是用元素 $x$ 所作变形变到第一个的. 此时用此元素变形基(4), 就把它变成群 $G$ 的 Sylow $\Pi'$-基

$$R_1 = x^{-1} Q_1 x, P_2, \cdots, P_k. \tag{5}$$

现在剩下来要证的是基(3)和(5)的共轭性.

设

$$A = \{P_1, P_2, \cdots, P_k\}, \quad B = \{R_1, P_2, \cdots, P_k\}.$$

由

$$x^{-1}(Q_1 \cap H)x = P_1 \cap H$$

得

$$R_1 \cap H = P_1 \cap H,$$

又因为 $P_i \subset H$, $i = 2, 3, \cdots, k$, 故有

$$A \cap H = B \cap H.$$

把此交记作 $H'$；它是 $A$ 的也是 $B$ 的正规子群, 因而也是 $\{A, B\}$ 的正规子群. Sylow $p_1$-子群 $P_1$ 和 $R_1$ 在 $\{A, B\}$ 中共轭, 因此子群

$A=\{H',P_1\}$ 和 $B=\{H', R_1\}$ 也共轭. 这样, 基(5)经变形可转成群 $A$ 中的某个 Sylow $\Pi'$-基, 而且这个基, 在 $A$ 是群 $G$ 的真子群的条件下, 又和基(3)共轭.

若是 $A=G$, 则此时也有 $B=G$. 当然, 这种情况的发生仅当 $\Pi'=\Pi$, 且 $\Pi$ 是由群 $G$ 的阶的所有素因数组成时这才是可能的. 当 $i=2,3,\cdots,k$ 时, 令

$$A_i=\{P_1,P_2,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_k\},$$

$$B_i=\{R_1,P_2,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_k\}.$$

由上面证过的知子群 $A_i$ 和 $B_i$ 在 $G$ 中共轭. 但因现在有 $G=B=B_iP_i$, 故在 $P_i$ 中可找到元素 $x_i$,

$$x_i\in P_i \tag{6}$$

使得

$$x_i^{-1}B_ix_i=A_i. \tag{7}$$

今证, 对任意 $j$, $j=2,3,\cdots,k$, $j\neq i$,

$$x_i^{-1}P_jx_i=P_j. \tag{8}$$

事实上, 依(6)

$$x_i^{-1}P_jx_i\in\{P_i,P_j\},$$

而依(7)

$$x_i^{-1}P_jx_i\subset A_i.$$

因此, 注意到 Sylow-基的定义, 有

$$x_i^{-1}P_jx_i\subseteq\{P_i,P_j\}\cap A_i=P_j,$$

由之便得(8).

元素

$$x=x_2x_3\cdots x_k$$

把基(5)变到基(3). 事实上, 由(6)和(8)得

$$x^{-1}P_ix=P_i,\qquad i=2,3,\cdots,k.$$

另一方面, 当 $i=2,3,\cdots,k$ 时(6)和(7)给出

$$x^{-1}R_1x=(x_{i+1}\cdots x_k)^{-1}x_i^{-1}(x_2\cdots x_{i-1})^{-1}R_1(x_2\cdots x_{i-1})$$
$$x_i(x_{i+1}\cdots x_k)\subset(x_{i+1}\cdots x_k)^{-1}x_i^{-1}B_ix_i(x_{i+1}\cdots x_k)$$
$$=(x_{i+1}\cdots x_k)^{-1}A_i(x_{i+1}\cdots x_k)$$
$$=A_i.$$

因此 $x^{-1}R_1x$ 在所有 $A_i$, $i=2,3,\cdots,k$ 之交中，即在 $P_1$ 中，由之得

$$x^{-1}R_1x=P_1.$$

定理证完.

Ph. Hall[1]证明了下面定理.

*若有限可解群 $G$ 的阶有形式*

$$n=kl,\quad (k,l)=1,$$

*则群 $G$ 的任意子群其阶整除 $k$ 者，含在 $k$ 阶子群中.*

对群的阶作归纳法来证明. 设在群 $G$ 中给一子群，其阶 $k_0$ 整除 $k$. 在 $G$ 中取非平凡正规子群 $H$，其阶 $n'$ 写成

$$n'=k'l',$$

其中 $k'$，$l'$ 依次整除 $k$ 和 $l$，并假设

$$l'<l \tag{9}$$

商群 $G/H$ 有阶

$$\frac{n}{n'}=\frac{k}{k'}\cdot\frac{l}{l'}.$$

其子群 $AH/H$ 的阶整除$\frac{k}{k'}$，因此依归纳法假设，子群 $AH/H$ 含在 $\frac{k}{k'}$阶子群 $F/H$ 中. 随之，群 $G$ 的子群 $F$ 有阶 $kl'$，而由(9)它异于 $G$. 再用一次归纳假设，而这次用到群 $F$ 上，注意到 $A\subset F$ 且 $F$ 的阶被 $k$ 整除，我们便得子群 $A$ 含在 $k$ 阶子群中.

今设在 $G$ 中找不到有性质(9)的正规子群 $H$，即是任意非平凡正规子群的阶都被 $l$ 整除. 下面用 $H$ 表示群 $G$ 主列中异于 $E$ 的最小项. 正规子群 $H$ 应是阿贝尔群，其阶是素数的幂——不然的

话$H$将不是$G$中极小正规子群. 如我们知道的, 此阶被$l$整除, 因此它就等于$l$.

现在子群$AH$的阶是$k_0 l$且$(k_0, l)=1$. 其次, 依本节中证过的 Hall 定理, 群$G$含有$k$阶子群$B$. 因为

$$\{AH, B\} = HB = G,$$

故交

$$AH \cap B = A'$$

是$k_0$阶子群. 应用同一个 Hall 定理, 然而这次是对子群$AH$, 我们便得, 子群$A$和$A'$共轭

$$x^{-1}A'x = A.$$

此时$x^{-1}Bx$就是含子群$A$的$k$阶子群.

定理证完. 对于Π-可离群的相应定理尚未得到.

由刚证的定理便得本节开始第一段中所叙述的断语.

在 Baer[25]和 Гольберг[2]中完成了向无限群的过渡. 在这些文章中, 本节中证过的 Hall 定理被推广到局部正规和局部可解群. 并且使用的或者是§55中所陈述的方法, 或者是与它相近的方法.

Казачков[1, 2]把 Sylow Π-子群共轭性的问题向前推进一些. 他对群的所有 Sylow Π-子群(对给定的Π)是共轭的这一性质证明了局部定理, 然而这里要求在这些 Sylow Π-子群里至少有一个有限的共轭子群系. 由之可得, *若局部有限和局部可解群具有限的共轭 Sylow Π-子群系, 则此群的所有 Sylow Π-子群彼此共轭.*

**Schur 定理**. 在有限群论中下面的 **Schur 定理**常是很有用的(参看 Zassenhaus[2]).

*若有限群$A$和$B$有互素的阶, 则群$A$借助群$B$的任意扩张都是可裂的.*

设群 $A$ 和 $B$ 的阶依次为 $k$ 和 $l$, $(k,l)=1$, 并给定群 $A$ 借助群 $B$ 的一个扩张. 需要证明, 群 $G$ 有阶为 $l$ 的子群. 对 $k$ 作归纳法来证.

设 $p$ 是 $k$ 的一个素因数, $P$ 是群 $G$ 的 Sylow $p$-子群, $N$ 是它在 $G$ 中的正规化子. 显然, 群 $G$ 的所有 Sylow $p$-子群, 其中也有 $P$, 都包含在 $A$ 中. 交集 $N\cap A$ 是 $N$ 中的正规子群, 并且它在 $N$ 中的指数等于 $l$, 因为 $N$ 在 $G$ 中和 $N\cap A$ 在 $A$ 中的指数相同——它们都等于群 $G$ 的 Sylow$p$-子群的个数. 因此群 $N/P$ 含有指数为 $l$ 的正规子群 $(N\cap A)/P$. 应用归纳假设, 由于 $(N\cap A)/P$ 的阶小于 $k$, 可在群 $N/P$ 中找到阶为 $l$ 的子群 $H/P$.

用 $Z$ 表示 $p$-群 $P$ 的中心; 由 §54 我们知道, 它异于 $E$. 群 $H/Z$ 含有指数为 $l$ 的正规子群 $P/Z$. 因为 $P/Z$ 的阶小于 $k$, 再用一次归纳假设, 我们在群 $H/Z$ 中可得一个阶为 $l$ 的子群 $F/Z$.

再用归纳假设已不可能了, 因为原给的群 $A$ 本身可能是阿贝尔 $p$-群. 因此我们来利用 §48 中结果. 阿贝尔 $p$-群 $Z$ 借助 $l$ 阶群 $F/Z$ 的扩张 $F$ 可由某个因子系 $m_{\alpha,\beta}$ 和一个自同构系给出. 令

$$c_\beta=\prod_{\alpha\in F/Z} m_{\alpha,\beta}\ .$$

在 §48 中的等式(2)中认为 $\beta$ 和 $\gamma$ 是固定的, 令 $\alpha$ 变动而把其左侧和右侧分别相乘起来. 由于群 $Z$ 的交换性, 便得等式

$$m^l_{\beta,\gamma}=c^{-1}_{\beta\gamma}c_\gamma c^\gamma_\beta; \tag{10}$$

这里应注意到, 元素 $\alpha\beta$ 与 $\alpha$ 一起历遍整个群 $F/Z$.

用 $k'$ 表示群 $Z$ 的阶. 因为 $(k',l)=1$, 故有数 $l'$, 使得

$$ll'\equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ k').$$

取等式(10)两侧的 $l'$ 次方, 再注意到群 $Z$ 的交换性便得

$$m_{\beta,\gamma}=(c^{l'}_{\beta\gamma})^{-1}c^{l'}_\gamma(c^{l'}_\beta)^\gamma.$$

把它和 §48 中的等式(8)比较, 我们得到群 $Z$ 的扩张 $F$ 等价于带

单位因子的扩张，亦即是可裂的(参看§52)．这就证明了，子群$F$,因而群$G$本身,具有 $l$ 阶子群．定理证完．

Schur 定理的一个特殊情形,即当群$B$是可解时，也可由 Чунихин 定理导出——因为若令$\Pi$表示群$B$的阶$l$之所有素因数的集合，则此时群$G$是$\Pi$-可离的．并且还可得到，群$G$中所有$l$阶子群彼此共轭．Zassenhaus[2]在群$A$是可解的条件下也证明了这些子群的共轭性．在一般情况下这个论断的正确性暂时还没有解决[1](参看补充.18.2.).

## §61. 有限半单群

有限群叫作半单的,如果它不包含异于$E$的可解正规子群.因为任意可解群都有异于$E$的阿贝尔特征子群——换位子群列的倒数第一项就是这样的，故有限半单群也可以定义为没有异于$E$的阿贝尔正规子群的群.

Fitting[6]证明了下面定理.

*任意有限群$G$都是可解群借助半单群的扩张.*

事实上，设在群$G$中给出可解正规子群$A$和$B$．此时它们的积$AB$也是可解正规子群．这是因为,在

$$AB/A \simeq B/(A \cap B)$$

中右侧是可解群,因而群$AB$,作为可解群$A$借助可解群$AB/A$的扩张,它本身也是可解的(参看§57).

依条件.群$G$是有限的,故它有极大可解正规子群$H$．由上面证过的可得它的唯一性．商群$G/H$已是半单的了，这是因为,若它有非平凡的可解正规子群$F/H$，则群$G$的正规子群$F$，作为可解群借助可解群的扩张,也将是可解的,这和$H$的极大性矛盾.

---

1) 在准备第三版这段时间中这个问题也得到解决了(参看补充篇前的序言).

定理证完. 这里我们注意到, 极大可解正规子群在群中是被一意确定的, 并且, 可解群 $A$ 借助半单群 $B$ 的扩张显然以 $A$ 为它极大的可解正规子群. 这样如果令群 $A$ 历遍一切有限可解群而令群 $B$ 历遍一切有限半单群并取 $A$ 借助 $B$ 的所有不等价的扩张, 则我们就得到所有的有限群, 并且每个只取一次.

在 Fitting[6] 中指出, 有限半单群的刻划可以完全归结为对非交换单群以它们的自同构群的刻划. Гольберг[1] 把 Fitting 的结果推到无限情形, 但需对半单群的定义作某些变动. 我们将只限于有限半单群的情况, 亦即介绍 Fitting 的结果.

先考察另一个群类, 它在群论范围外是经常被使用的. 我们此时将不假定群是有限的, 此外, 还容许带有任意算子系.

群 $G$ 叫作完全可约的, 如果它可分解成有限个单群(在有算子情形, 指关于给定算子系的单群)的直积.

任意完全可约群都有主列.

这是因为, 若群

$$G=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n \tag{1}$$

是完全可约而 $A_i$ 是单群, 则列

$$E\subset A_1\subset(A_1\times A_2)\subset\cdots\subset G$$

是此群的主(还是合成)列.

这样对于完全可约群可以使用 Шмидт 定理(§ 47), 因而完全可约群的形如(1)的任二直分解必中心同构. 若是除此之外, 群 $G$ 还没有中心, 这和假设"分解(1)中的所有直因子 $A_i$, $i=1, 2, \cdots, n$ 都不可交换"是一样的, 则 $G$ 具有唯一的形如(1)的直分解.

完全可约群 $G$ 的任意(容许)正规子群 $B$ 本身也是完全可约的且是群 $G$ 的直因子.

先证明第二个论断. 若(1)是群 $G$ 分解成单群直积的一个分解式, 则直因子 $A_i$ 将称为第一种因子, 如果它含在正规子群 $B$ 和

$A_1\times\cdots\times A_{i-1}$ 的乘积中，不然的话，就称它为第二种因子．若 $A_i$ 是第二种因子，则它与子群 $B(A_1\times\cdots\times A_{i-1})$ 组成直积；这是因为，由因子 $A_i$ 的单性，在此时将有：它与这个乘积之交等于 $E$．现在容易看清，子群 $B$ 和(1)中所有第二种因子组成直积，且它与 $G$ 相等，因为在其中也包含(1)中所有第一种因子．

这就使我们得到群 $G$ 的一个直分解，在其中正规子群 $B$ 是一个直因子．为了证明定理的第一个断语，把这个直分解中的 $B$ 换成它的一个不可分解群的直积分解式，这样就得到此直分解的一个接续．此接续与分解(1)是中心同构的，由之便得，群 $B$ 本身可分解成单群的直积．定理证完．

*有限完全可约群 $G$，若没有中心，必是半单的．*

这是因为，若是群 $G$ 有个可解正规子群 $B$，则依上面定理它是完全可约的，因而是阿贝尔群．此外，它还是群 $G$ 的直因子，但这是不可能的，因为 $G$ 没有中心．

*若在任意群 $G$ 中给了两个没有中心的完全可约正规子群 $A$ 和 $B$，则它们的乘积 $AB$ 也是完全可约的且没有中心．*

事实上，若

$$D=A\cap B,$$

则 $D$ 是 $G$ 中，也是 $A$ 中的正规子群，因此由群 $A$ 的完全可约性有

$$A=D\times A'. \tag{2}$$

用群 $G$ 的任意元素 $g$ 变形这个等式，得

$$A=D\times(g^{-1}A'g) \tag{3}$$

由 § 42 中的一个引理，等式(2)和(3)说明子群 $A'$ 和 $g^{-1}A'g$ 在 $A$ 中是中心同构的，又因为群 $A$ 没有中心，故

$$A'=g^{-1}A'g.$$

这就证明了，$A'$ 是群 $G$ 中正规子群，且是完全可约的并且无中心．因为

$$AB=\{D, A', B\}=\{A', B\}$$

以及

$$A'\cap B=E,$$

则有

$$AB=A'\times B,$$

由之得群 $AB$ 也是完全可约的和没有中心.

由此定理得，任意有限群有唯一极大完全可约而没有中心的正规子群. 可以想象的，在一般情况这个正规子群可能和 $E$ 重合. 但有下面定理.

*若 $G$ 是异于 $E$ 的有限半单群，则它的极大完全可约正规子群 $H$——由 $G$ 的半单性，它没有中心——也是异于 $E$ 的.*

先证下面**引理**:

*有限半单群 $G$ 的任意正规子群 $A$ 也是半单的.*

事实上，不然的话，群 $A$ 将有异于 $E$ 的极大可解正规子群 $H$，它作为群 $A$ 的特征子群也是群 $G$ 的正规子群，而这和此群的半单性是矛盾的.

现在转来证明定理，对群 $G$ 的阶作归纳法. 事实上，若群 $G$ 是一切异于 $E$ 的有限半单群中有最小阶者，则由上面引理它是单群，因而与自己极大完全可约正规子群重合.

下面认定对所有其阶小于 $G$ 的阶，且异于 $E$ 的有限半单群定理成立. 若群 $G$ 是单的，则和上面的想法一样可证定理是对的. 否则 $G$ 有非平凡正规子群 $A$，它是有限的、异于 $E$ 的，因而依引理是半单的. 由归纳假设群 $A$ 有异于 $E$ 的极大完全可约正规子群 $B$. 作为群 $A$ 的特征子群，子群 $B$ 是群 $G$ 的正规子群，因此 $G$ 有异于 $E$ 的完全可约正规子群，而这也就是要证的.

还能证明更多一些: *若 $G$ 是异于 $E$ 的有限半单群，则其极大完全可约正规子群 $H$ 的中心化子 $C$ 等于 $E$.*

事实上，$C$是$G$的正规子群(参看§11)，因而依引理是半单的. 此外，有$C\cap H=E$，因为此交集是群$H$的中心；随之

$$\{C, H\}=C\times H.$$

若$C$异于$E$，则依前面定理，它的极大完全可约正规子群$H'$也是异于$E$. 但由之得群$G$有完全可约正规子群$H'\times H$，不含在正规子群$H$中，这与后者的极大性相矛盾. 因此，$C=E$，这也就是要证的.

在这些预备性讨论之后我们可以转来刻划半单群. 设$G$是任意有限半单群，$H$是它极大完全可约正规子群，$\Gamma$是群$H$的自同构群. 因为群$H$没有中心，则它同构于自己的内自同构群而因之可以认定，群$H$含在$\Gamma$中.

用群$G$的任一元素$x$变形群$H$，我们得到群$H$的一个自同构$\varphi_x$. 群$G$到群$\Gamma$的映射$x\to\varphi_x$是同态且还是同构，因为$H$在$G$中的中心化子等于$E$. 因此，群$G$同构于群$\Gamma$的一个子群，并且此子群显然包含$H$.

反过来，设$H$是任意无中心的完全可约群，$\Gamma$是它的自同构群，若是把群$H$和它的内自同构群等同起来，可以认定$H$包含在$\Gamma$中，且是$\Gamma$的正规子群. 其次设在群$\Gamma$中给一任意含$H$的子群. 此时$F$是半单子群，而$H$是它的极大完全可约正规子群.

事实上，设群$\Gamma$的元素$\gamma$作为群$H$的自同构必和此群的任意内自同构可换，即当$x, y$属于$H$时有

$$y^{-1}(x\gamma)y=(y^{-1}xy)\gamma=(y\gamma)^{-1}(x\gamma)(y\gamma).$$

由之有

$$(x\gamma)[y(y\gamma)^{-1}]=[y(y\gamma)^{-1}](x\gamma).$$

由于元素$x\gamma$与$x$一起历遍整个群$H$，故元素$y(y\gamma)^{-1}$属于群$H$的中心，亦即等于$E$，由之对任意$y\in H$，

$$y=y\gamma$$

这样，自同构$\gamma$是恒等自同构. 因此子群$H$在群$\Gamma$的中心化子等于$E$.

今设$K$是群$F$的一个可解正规子群. 此时$H\cap K$是$H$中的可解正规子群，而由$H$的半单性知此交集等于$E$. 因此群$F$的正规子群$H$和$K$组成直积，因而$K$进到子群$H$在群$\Gamma$中的中心化子内，依上面证过的知它等于$E$. 这就证明了群$F$的半单性.

最后，若$H$包含在群$F$的一个较大的完全可约正规子群$\bar{H}$内，则我们知道正规子群$H$是完全可约群$\bar{H}$的一个直因子

$$\bar{H}=H\times H^*.$$

子群$H^*$随之必含在子群$H$在群$\Gamma$的中心化子内，因而等于$E$，由之$\bar{H}=H$. 这就证明了定理的最后一个结论.

对$H$和$\Gamma$作和前一定理同样的假设，可以证明，*若$F_1$和$F_2$是群$\Gamma$中含$H$的两个子群且彼此同构，则它们在$\Gamma$中共轭.*

为了把此定理的证明弄得清晰，我们不去把群$H$的元素和与之相应的内自同构等同起来. 由群$H$的元素$x$所确定的内自同构记作$\bar{x}$，而群$H$的整个内自同构群记作$\bar{H}$. 这样，$\bar{H}$是群$\Gamma$的正规子群.

其次用$\bar{\Gamma}$表示群$\bar{H}$的自同构群. 由群$H$和$\bar{H}$的同构对应易得群$\Gamma$和$\bar{\Gamma}$的同构对应：若$\gamma\in\Gamma$，则元素$\gamma$对应群$\bar{\Gamma}$的元素$\gamma'$，使得对任意$x\in H$有

$$\bar{x}\gamma'=\overline{x\gamma}. \tag{4}$$

今证，对任意$\gamma\in\Gamma$有

$$\gamma'=\bar{\gamma}, \tag{5}$$

其中$\bar{\gamma}$是群$\bar{H}$的一个自同构，它是当把$\bar{H}$作为群$\Gamma$的正规子群由元素$\gamma$确定的变形诱导出来的.

事实上，对于任意$y\in H$有

$$y(\gamma^{-1}\bar{x}\gamma)=[x^{-1}(y\gamma^{-1})x]\gamma=(x\gamma)^{-1}y(x\gamma),$$

亦即

$$\gamma^{-1}\bar{x}\gamma=\overline{x\gamma}.$$

由之利用(4)得

$$\bar{x}\gamma'=\gamma^{-1}\bar{x}\gamma,$$

又因为 $\bar{x}$ 是 $\bar{H}$ 中任意元素，故等式(5)就被证明了. 用 $\varphi$ 表示这个同构对应 $\gamma\to\bar{\gamma}$, 即是 $\gamma\varphi=\bar{\gamma}=\gamma'$.

这样，在定理的叙述中所说到的子群 $F_1$ 和 $F_2$ 包含子群 $\bar{H}$, 并且依前一个定理，$\bar{H}$ 在这些子群中的每一个内都是极大完全可约正规子群. 由之便得，依假设而存在的那个子群 $F_1$ 到子群 $F_2$ 上的同构对应 $\theta$ 诱导出子群 $\bar{H}$ 的一个自同构 $\bar{\gamma}$, 即对所有 $\bar{x}\in\bar{H}$ 有

$$\bar{x}\theta=\bar{x}\bar{\gamma}. \tag{6}$$

显然，$\bar{\gamma}$ 是群 $\bar{\Gamma}$ 中的元素.

用 $\bar{F}_1$ 和 $\bar{F}_2$ 表示在同构对应 $\varphi$ 下子群 $F_1$ 和 $F_2$ 的象. 映射

$$\bar{f}_1\longrightarrow\overline{f_1\theta}$$

是 $\bar{F}_1$ 和 $\bar{F}_2$ 之间的同构对应. 我们知道，$\bar{f}_1$ 是群 $\bar{H}$ 的下面这个自同构：

$$\bar{x}\longrightarrow f_1^{-1}\bar{x}f_1,\qquad \bar{x}\in\bar{H} \tag{7}$$

同样地，$\overline{f_1\theta}$ 是自同构

$$\bar{x}\longrightarrow(f_1\theta)^{-1}\bar{x}(f_1\theta),\qquad \bar{x}\in\bar{H}$$

因为 $\bar{x}\bar{\gamma}=\bar{x}\theta$ 随同 $\bar{x}$ 历遍整个群 $\bar{H}$, 以及由于(6), 故可得

$$\begin{aligned}\bar{x}\bar{\gamma}=\bar{x}\theta\longrightarrow(f_1\theta)^{-1}(\bar{x}\theta)(f_1\theta)&=(f_1^{-1}\bar{x}f_1)\theta\\&=(f_1^{-1}\bar{x}f_1)\bar{\gamma}.\end{aligned}$$

由于(7)群 $\bar{H}$ 的自同构 $\bar{\gamma}^{-1}\bar{f}_1\bar{\gamma}$ 也把元素 $\bar{x}\bar{\gamma}$ 映到元素 $(f_1^{-1}\bar{x}f_1)\bar{\gamma}$:

$$(\bar{x}\bar{\gamma})(\bar{\gamma}^{-1}\bar{f}_1\bar{\gamma})=\bar{x}(\bar{f}_1\bar{\gamma})=(f_1^{-1}\bar{x}f_1)\bar{\gamma}.$$

这就证明了，对所有 $\bar{f}_1\in\bar{F}_1$ 有等式

$$\overline{f_1\theta}=\bar{\gamma}^{-1}\bar{f}_1\bar{\gamma},$$

亦即证明了，子群 $\bar{F}_1$ 和 $\bar{F}_2$ 在群 $\bar{\Gamma}$ 中的共轭性，而这就是要证明的.

我们证明了的这些定理引出下面结果.

我们将能得所有的有限半单群，并且每个只取一次，如果

1) 我们取出所有无中心的有限完全可约群；

2) 把每一个无中心的完全可约群 $H$ 和其内自同群等同起来而嵌入到其自同构群 $\Gamma$ 中；

3) 把群 $\Gamma$ 的所有含 $H$ 的子群划分成共轭子群系；

4) 在每一个这样的系中取出一个代表来.

这样我们就把对于有限半单群的刻划归结到对无中心的有限完全可约群及其自同构群的刻划. 上面已证过，对完全可约无中心的群的刻划可完全地归结为对单群的刻划. 在 Fitting[6](参看 Гольберг[1])中已证明，若给定无中心的完全可约群

$$G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n,$$

其中所有 $A_i$ 都是单群，则群 $G$ 的自同构群可用完全确定的方式利用群 $A_1, \cdots, A_n$ 的自同构群构造出来.

但是，应当着重指出，描述所有非交换单群的问题是非常困难的且距离完成是非常远的. 在 §9 中我们介绍了这类群的一个无限系列，即是当 $n \geqslant s$ 时的所有 $n$ 次交错群. 现在已知一些类似的系列，还有在这些系列之外的若干个别的有限单群[1].

到现在为止已找到的所有非交换有限单群都有偶数阶. 是否存在阶为奇复合数的有限单群的问题，这也就是著名的 Burnside 问题. 因为所有奇数阶群的所有合成因子也是奇数阶的，故如 §57 中曾指出过的，这个问题等价下述问题：是否奇数阶的有限群都是可解的？现在已知的是(Frobenius, Burnside, B. K. Туркин)：以

1) 在准备第三版这段时间，这个问题得到重要的推进.

不超过七个素因数组成的奇数为阶的有限群确是可解的[1].

现引叙一些其他定理(基本上源自 Frobenius 和 Burnside),它们把有限群(但不一定是奇数阶)的非单问题与此群的阶的性质以及此群的一些其他性质联系在一起. 这其中某些定理的证明需要利用群的表示和特征标理论,因此不能在本书中介绍.

有限群,其阶只含不多于两个不同素数的幂,必是可解的.

有限群,其阶不被任一素数的平方整除,必是可解的.

若一个有限群的某个共轭元素系所含元素个数是素数的幂,则此群不是单的.

若一个有限群的某个 Sylow $p$-子群含在其正规化子的中心内,则此群不是单的.

若有限群 $G$ 有个真子群 $A$, 它与自己的正规化子重合并和与之共轭的每一个子群的交集等于 $E$, 则群 $G$ 不能是单的.

上述这些定理有许许多多的推广, 还有这种类型的许多其他定理. 一系列类似的"非单性的判定条件"发表在, 例如 B. K. Туркин, A. A. Кулаков, C. A. Чунихин, A. П. Дицман, П. E. Дюбюк 等人的论文中.

1) 上面已说过,在准备第三版这段时间,这个问题已得到解决(参看补充篇的序言).

# 第十五章 幂 零 群

## §62. 幂零群和有限幂零群

可解群是阿贝尔群的一个很泛的推广，因而只有阿贝尔群的为数不多的较深入性质可扩展到可解群上．从这个角度来看更有兴趣的是介于阿贝尔群和可解群之间的一个群类．本章就是研究此类群以及它的推广．

设在群$G$中给定一不变列

$$E=A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_i\subset\cdots\subset A_n=G. \qquad (1)$$

称此列是*中心列*，如果当$i=0, 1, \cdots, n-1$时商群$A_{i+1}/A_i$在商群$G/A_i$的中心内；换言之，如果相互换位子群$[A_{i+1}, G]$(参看§14)在$A_i$中，

$$[A_{i+1}, G]\subseteq A_i, \qquad i=0, 1, \cdots, n-1. \qquad (2)$$

我们指出，列(1)的不变性其实是可以不必要求的，因为由(2)得，对所有的$i$有包含关系

$$[A_i, G]\subseteq A_i,$$

这等价于说$A_i$在$G$中是正规的．

至少具有一个中心列的群$G$称之为*幂零的*．显然，所有阿贝尔群是幂零的．另一方面，任意幂零群是可解的，因为中心列当然更是可解列．

这三类群在有限的情形也已经是彼此互异的．事实上，存在有无中心的可解群，例如3次对称群就是，然而幂零群的中心包含中心列(1)中的子群$A_1$，因之它是异于$E$的．另一方面，在下面我们将看到，任意有限$p$-群是幂零的，但不一定是阿贝尔的．

*幂零群的任意子群和任意商群都是幂零的．*

事实上，设在具中心列(1)的幂零群$G$中给一子群$H$．若令

$$B_i = A_i \cap H, \qquad i = 0, 1, \cdots, n, \tag{3}$$

则由(2)当 $i=0, 1, \cdots, n-1$ 时有

$$[B_{i+1}, H] \subseteq [A_{i+1}, G] \cap H \subseteq A_i \cap H = B_i.$$

因此，子群(3)在去掉重复者之后组成子群$H$的中心列.

另一方面，设给一具中心列(1)的幂零群$G$到群$\bar{G}$上的一个同态对应$\varphi$. 用$\bar{A}_i$表示在此同态对应下子群$A_i$的象, $i=0, 1, \cdots, n$. 设$\bar{a}_{i+1}$和$\bar{g}$顺序为$\bar{A}_{i+1}$和$\bar{G}$中的元素, $i=0, 1, \cdots, n$, 而$a_{i+1}$和$g$是$\bar{a}_{i+1}$与$\bar{g}$在同态对应$\varphi$下在$A_{i+1}$和$G$中的某原象,

$$a_{i+1}\varphi = \bar{a}_{i+1}, \quad g\varphi = \bar{g}.$$

因为，依(2),

$$[a_{i+1}, g] \subset A_i,$$

则

$$[\bar{a}_{i+1}, \bar{g}] = [a_{i+1}, g]\varphi \subset \bar{A}_i.$$

随之去掉重复的之后子群$\bar{A}_i$, $i=0, 1, \cdots, n$, 组成群$\bar{G}$的中心列.

有限个幂零群的直积是幂零的.

事实上，设

$$G = \prod_{k=1}^{s} G_k,$$

且所有群$G_k$都是幂零的. 从这些群中各选出一个中心列，如果需要，我们允许列有重复项，这样可认定这些列的长相等. 设

$$E = A_{k0} \subseteq A_{k1} \subseteq \cdots \subseteq A_{ki} \subseteq \cdots \subseteq A_{kn} = G_k$$

是群$G_k$, $k=1, 2, \cdots, s$的中心列. 此时子群

$$B_i = \prod_{k=1}^{s} A_{ki}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

就组成群$G$的中心列.

要注意的是，幂零群借助幂零群的扩张不一定是幂零的，因为，不然的话，所有可解群将都是幂零的了.

在§14中曾定义了任意群的下中心链的概念：这就是子群链

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_k\supseteq\cdots,$$

其中

$$G_{k+1}=[G_k, G],\quad k=0,1,2,\cdots.$$

令在具中心列(1)的幂零群 $G$ 中构造此链. 依(2)

$$G_1=[G,G]=[A_n,G]\subseteq A_{n-1}.$$

设已证得 $G_k\subseteq A_{n-k}$. 此时

$$G_{k+1}=[G_k,G]\subseteq[A_{n-k},G]\subseteq A_{n-k-1}.$$

由之得

$$G_n\subseteq A_0=E,$$

即 $G_n=E$.

这就证明了，在幂零群中下中心链在有限步内稳定在 $E$ 上，即是变成下中心列，且此列的长度不大于此群的任意中心列的长度. 显然，下中心列满足上面给出的中心列的定义，因而具有有限的下中心列可以作为幂零群的一个定义.

在任意群 $G$ 中还可以构造上中心链：这就是这样的子群叙列

$$E=Z_0\subseteq Z_1\subseteq Z_2\subseteq\cdots\subseteq Z_k\subseteq\cdots,$$

其中 $Z_1$ 是群 $G$ 的中心，$Z_2/Z_1$ 是群 $G/Z_1$ 的中心，一般地，$Z_{k+1}/Z_k$ 是群 $G/Z_k$ 的中心. 易见，此链是由特征子群组成的，可能会超限地继续下去，并且此链虽终将稳定下来，但不一定达到群 $G$ 上.

今在具中心列(1)的幂零群 $G$ 中构造上中心链. 因为依(2)，$[A_1,G]=E$，故 $A_1\subseteq Z_1$. 设已证 $A_k\subseteq Z_k$. 此时依(2)

$$[A_{k+1},G]\subseteq A_k\subseteq Z_k,$$

这说明在群 $G$ 到商群 $G/Z_k$ 上的自然同态映射下子群 $A_{k+1}$ 被映入此商群的中心内，因而 $A_{k+1}\subseteq Z_{k+1}$. 由之得

$$A_n=G\subseteq Z_n,$$

即是 $Z_n=G$.

这就证明了，在幂零群中上中心链在有限步内达到此群本身，即是变成上中心列，并且此列之长度不超过此群任意中心列的长度．这样具有有限上中心列也可作为幂零群的定义．

由上面说过的可得，在幂零群中下中心列和上中心列有相同的长度，都等于群的中心列的最小长度．此长度叫作幂零群的类．例如，1 类幂零群就是阿贝尔群，2 类幂零群是非交换的亚阿贝尔群．

设 $G$ 是其类不超过 $k$ 的幂零群．这时此群的下中心列的第 $k$ 项 $G_k$ 等于 $E$．换言之，在群 $G$ 中恒等地满足关系式

$$[\cdots[[x_1, x_2], x_3]\cdots, x_{k+1}]=1.$$

因此依 §37，群 $G$ 是相应此恒等关系的某个导出自由群的商群．易见，此导出自由群就是自由群 $F$ 关于其下中心链中第 $k$ 项 $F_k$ 的商群．

商群 $F/F_k$ 本身是 $k$ 类幂零群；称之为 $k$ 类自由幂零群．群 $F$ 的自由生成元的个数叫作群 $F/F_k$ 的秩．由在 §37 中证明的Baer定理，这个秩是此群的不变量．

这样，其类不超过 $k$ 的任意一个幂零群是某一 $k$ 类自由幂零群的商群．并且具 $n$ 个生成元的幂零群是 $n$ 秩自由幂零群的商群．当 $k=1$ 时这就是我们已知道的定理：任意阿贝尔群是自由阿贝尔群的商群．

Мальцев[9]中证明了关于自由幂零群的自同构的一些定理．在 Головин[2-5]中引入并研究了群的第 $k$ 幂零积，$k=1, 2, \cdots$．这个构造关于 $k$ 类自由幂零群所处的地位，就像直积之对于自由阿贝尔群或者自由积之对于自由群一样．直积和自由积的一系列性质也对幂零积证明了；例如，把这个构造看作群集上的运算，它是结合的．Ляпин[8]中给出了另一个有此性质的构造例子．

有限幂零群．现在我们给出幂零群的一系性质，在有限幂零

群的情形它们与其定义等价.

*幂零群的任一子群可以出现在此群的一个正规列中，即它是可届子群.*

事实上，设 $G$ 是幂零群

$$E=A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n=G$$

是它的中心列，$H$ 是群 $G$ 的真子群. 存在有 $i, i<n$，使得

$$A_i\subseteq H,\quad A_{i+1}\not\subset H.$$

但依(2)，$A_{i+1}$ 中任意元素和 $H$ 中任意元素的换位子含在 $A_i$ 中，即包含在 $H$ 中. 因此子群 $H$ 在群 $G$ 中的正规化子 $H_1$ 含有 $A_{i+1}$，随之异于 $H$. 若子群 $H_1$ 仍异于 $G$，则由于同样原因它的正规化子 $H_2$ 必较 $H_1$ 严格地大，并且它无论如何总含有子群 $A_{i+2}$. 这样继续下去，最多不过 $n-i$ 步便可达到群 $G$. 子群

$$E\subset H\subset H_1\subset H_2\subset\cdots\subset G$$

便组成群 $G$ 的正规列.

刚证的这个性质能否作为幂零群的定义，是一个现在还没有解决的问题.

由证得的定理可得，*幂零群的任意真子群异于其正规化子*. 对具有此最后一性质的群说是在其中有*正规化子条件*.

*若在群 $G$ 中有正规化子条件，则对任意素数 $p$ 此群的任意 Sylow $p$-子群是 $G$ 中的正规子群.*

事实上，在 §54 中证过，Sylow 子群的正规化子与它自己的正规化子重合. 因而在我们这种情形 Sylow 子群的正规化子将和整个群 $G$ 重合，即是所有 Sylow 子群在 $G$ 中是正规的.

这样，再依 §54，*有正规化子条件的群 $G$ 中关于每一素数 $p$ 都有唯一 Sylow $p$-子群. 对所有 $p$ 取出的这些 Sylow 子群在 $G$ 中组成直积，它包含且仅包含群 $G$ 中有限阶元素.* ——因为我们知道，任意有限循环群可分解成准素循环群的直和.

把上述结果应用到有限群便得，*任意有限幂零群可分解成 $p$-群的直积.*

逆命题也是成立的，而这使得有限幂零群，或者像过去叫作的有限特殊群特别有趣味.

*可分解成 $p$-群直积的任意有限群是幂零的.*

上面已证过，有限个幂零群的直积是幂零的，因而只需证明下面定理，由此定理我们还再一次的得到在 §57 中证过的有限 $p$-群的可解性.

*任意有限 $p$-群是幂零的.*

事实上，如 §54 中证过的，有限 $p$-群有非平凡中心 $Z$. 商群 $G/Z$ 仍是有限 $p$-群，其中 $Z_1/Z$ 又是非平凡的，因此 $Z_1$ 较 $Z$ 严格地大. 继续作下去，我们便在 $G$ 中构成一个上中心列，即是证明了此群的幂零性.

我们找到了有限群的一些性质，其中每一个都可以取作有限幂零群的定义；这些性质是：存在中心列，正规化子条件，可分解成 $p$-群的直积. 有限幂零群还有与上述等价的许多其他定义. 下面介绍其中一些，但决不想穷尽关于此问题的所有可说的.

*有限群是幂零的当且仅当其所有极大(真)子群是正规子群.*

事实上，有限幂零群满足正规化子条件，因而其极大子群应是该群的正规子群. 反之，设群 $G$ 的所有极大子群在 $G$ 中是正规的. 设 $P$ 是群 $G$ 关于某一 $p$ 的 Sylow $p$-子群，$N$ 是它的正规化子. 若 $N$ 异于 $G$，则用 $A$ 表示群 $G$ 中含 $N$ 的一个极大子群. 因为在 $G$ 中有 Sylow $p$-子群的共轭性定理，故依 §54，任意含 $N$ 的子群，$A$ 也在其中，应和自己的正规化子重合. 但这和 $A$ 在 $G$ 中的正规性相矛盾. 因此，$N$ 和 $G$ 重合，即是 $P$ 是群 $G$ 的正规子群. 由关于所有 $p$，Sylow $p$-子群都是正规的，便得有限群 $G$ 是幂零的.

现在在任意群 $G$ 中来定义一个对我们来说是新的特征子群

如果群 $G$ 有极大子群，则把所有这些极大子群之交称之为群 $G$ 的 $\Phi$-子群；若是 $G$ 中无极大子群，则把 $G$ 本身认作是它自己的 $\Phi$-子群.

下面的定理成立(Neumann[5], Zassenhaus[2])

*群 $G$ 的 $\Phi$-子群由且仅由此群中下列诸元素 $x$ 组成，其中任一个元素若出现在群 $G$ 的任一生成元系中，就可从此系中把它扔掉，即是若 $G=\{M, x\}$，则 $G=\{M\}$.*

事实上，若元素 $x$ 不属于 $\Phi$-子群，则它不含在某个极大子群 $A$ 中，即是 $\{x, A\}=G$，然而 $\{A\}=A\neq G$. 反之，设有集合 $M$ 使

$$G=\{M, x\} \tag{4}$$

但 $G\neq\{M\}$. 令 $A$ 表示含 $M$ 而不含 $x$ 的子群中的一个极大者. 子群 $A$ 必是群 $G$ 的极大真子群，因为任意较大的子群应含元素 $x$，因之依(4)它与 $G$ 重合. 这样，元素 $x$ 不在极大子群 $A$ 中，因此也不在 $\Phi$-子群中.

由此定理可得，*若群 $G$ 的 $\Phi$-子群是有限的*(例如，在有限群情形)，*则任意与 $\Phi$-子群一起生成整个群 $G$ 的集合 $M$ 本身也是群 $G$ 的生成元系*. 作为这样 $M$ 的例子可取群 $G$ 关于 $\Phi$-子群的陪集的代表所组成的集合.

现在可以再指出一个定义有限幂零群的方法(Wielandt[2]).

*有限群 $G$ 是幂零的当且仅当它的换位子群含在其 $\Phi$-子群中，即是若任意与换位子群共同生成整个群 $G$ 的集合本身也生成 $G$.*

事实上，若换位子群含在群 $G$ 的 $\Phi$-子群 $\Phi$ 中，则商群 $G/\Phi$ 是阿贝尔的. 群 $G$ 的所有含 $\Phi$ 的子群，特别是群 $G$ 的所有极大子群，也就都是 $G$ 中的正规子群，由之便得群 $G$ 的幂零性.

反之，若群 $G$ 是幂零的，则任意极大子群 $A$ 在 $G$ 中正规. 商群 $G/A$ 不含真子群，即是素数阶的循环群，因而是阿贝尔群. 这样，

子群 $A$ 包含群 $G$ 的换位子群，因之换位子群含在所有极大子群之交，即是在 $\Phi$-子群内.

读者不难检验，在证明命题：*幂零群的换位子群含在此群的 $\Phi$-子群中*时，不必要求此群的有限性[1]. 读者在 Baer[24]中可看到把上面证明的定理搬到具有限生成元群上的一个推广（参看补充 27.4).

## § 63. 广义幂零群

在上节中给出的幂零群定义可以有一些自然的推广. 另一方面，有限幂零群定义的不同形式在过渡到无限群时便引导出一些群类，一般说，这些群类不再是相同的了. 下面我们介绍一些这种群类，对进一步的详情读者可看 Курош 和 Черников[1]. 在Конторович[8]中也讨论了某些广义幂零群类.

*中心系*的概念可作为中心列概念的推广：这就是指群 $G$ 的一个不变系 $\mathfrak{A}=[A_\alpha]$，对此系中任意桥 $A_\alpha, A_{\alpha+1}$，有包含关系

$$[A_{\alpha+1}, G]\subseteq A_\alpha,$$

换言之，商群 $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ 含在商群 $G/A_\alpha$ 的中心内.

我们称任意至少具有一个中心系的群为 *$Z$-群*或*有性质 $Z$ 的群*. 幂零群概念的这个推广是广泛的——由于 Magnus 定理(参看 § 36)所有自由群都是 $Z$-群.

如 Мальцев[3]中证明的，对性质 $Z$ 有*局部定理*:

*所有局部具有性质 $Z$ 的群也是 $Z$-群.*

这个定理可用对性质 $RN$ 证明局部定理曾用的同样方法(参看 § 58)去证明，而我们仅限于指出不得不作的一些变动. 现在应把子群 $C_{a,b}^{\alpha}$ 定义为系 $\mathfrak{C}^{\alpha}$ 中不含元素 $a, b$ 中任一异于 1 的最大子

1）因此，从任意幂零群的任意生成元系可以去掉任意有限个换位子群中的元素. 事实上，这对换位子群的无限子集也是对的，对幂零群的类作归纳法即可证明.

群；因此，例如，没有必要去考察与一对$(a, b)$相关联的局部系．子群 $H_{a,b}$ 也将不含 $a$ 或 $b$，虽然总是包含它们的换位子．证明下列一事：系 $\mathfrak{C}$ 如果需要的话，把群 $G$ 本身添上去，是群 $G$ 的中心系，就没有任何困难了(参看补充 25.7.)．

$ZA$-群组成窄得多的一个群类．这是指这样的群，它们具有依递增关系是良序的中心系，我们将称这样的系为*递增中心列*．幂零群的许多性质很容易搬到这个群类上．例如，几乎逐字重复上节中的相应讨论而只是有时利用一下超限归纳法，读者可证明下述命题．

*$ZA$-群的任意子群和任意商群都是 $ZA$-群．*

*一个群是 $ZA$-群当且仅当它的上中心链虽然可能是超限延续下去但终将能达到群 $G$ 本身．*

*在任意 $ZA$-群中有正规化子条件．*

对于 $ZA$-群局部定理是不可能证明的，这可由无中心的局部有限 $p$-群的存在而看出，但是下面定理是成立的(Черников [20])．

*一个群，若其所有可数子群是 $ZA$-群，则它本身也是 $ZA$-群．*

首先证明下述引理：

*一个群 $G$ 是 $ZA$-群当且仅当对其任意元素 $a$ 以及任意元素列 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ 存在正整数 $k$，使得*

$$[\cdots[[a, x_1], x_2], \cdots, x_k]=1^{1)}.$$

事实上，设 $G$ 是 $ZA$-群，其递增中心列是

$$E=A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_\alpha\subset\cdots\subset A_\mu=G, \qquad (1)$$

并设在 $G$ 中给定元素 $a$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$．若下列元素

$$a_k=[\cdots[[a, x_1], x_2], \cdots, x_k], \qquad k=1, 2, \cdots \qquad (2)$$

中没有等于 1 的，则可得足码 $\alpha$, $\alpha\geq 0$，使得子群 $A_\alpha$ 不含任一 $a_k$，

1) 提醒一下，$[a, b]$是元素 $a, b$ 的换位子．

而在子群 $A_{\alpha+1}$ 内至少含有其中一个元素，例如 $a_l$[1]。但此时由中心系的定义，

$$a_{l+1}=[a_l, x_{l+1}]\in A_\alpha,$$

这是和足码 $\alpha$ 的选择相矛盾的.

为了证明引理的另一面论断，先来证明，若在群 $G$ 中对任意元素 $a$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$，(2)中元素至少有一个等于 1，则在 $G$ 关于其中心 $Z$ 的商群中这也是对的. 设在 $G/Z$ 中给定元素 $aZ$ 和 $x_1Z, x_2Z, \cdots, x_kZ, \cdots$. 若按照(2)来确定群 $G$ 中的元素 $a_k$，则依条件将有足码 $k$，使 $a_k=1$. 因此

$$Z=a_kZ=[\cdots[[aZ, x_1Z], x_2Z], \cdots, x_kZ],$$

而这也就是要证的.

现在来证，若在群 $G$ 中对任意 $a$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$，(2)中元素至少有一个等于 1，则 $G$ 具有非平凡中心. 事实上，若群 $G$ 的元素 $a$ 不在中心内，则存在元素 $x_1$，使换位子 $a_1=[a, x_1]$ 异于 1. 若它仍不在中心内，则有 $x_2$，使换位子 $a_2=[a_1, x_2]$ 也异于 1. 这个过程不可能无限延续下去，否则将与关于 $G$ 所作的假设矛盾，因而某个 $a_k$ 必是异于 1 的属于中心的元素.

从上面两段所说的便得到引理另一面的论断，因为群 $G$ 的递增中心链将必达到群本身.

**定理的证明**现在就没有什么困难了. 若群 $G$ 不是 $ZA$-群，则依引理在其中可找到元素 $a$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$，使得(2)中任意一个元素都不等于 1. 子群 $\{a, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots\}$ 是可数的，然而再依引理它不是 $ZA$-群. 定理证完(参看补充 25.4.).

$N$-群. 现在转来研究有正规化子条件的群，或，简记作 $N$-群. 上面曾指出过，任意 $ZA$-群都是 $N$-群. 逆命题是否成立现在还

1) 由正规系的定义可知，当 $\alpha$ 是极限序数时列(1)中的子群 $A_\alpha$ 是其前面子群的并集.

未解决.

*群$G$是$N$-群当且仅当此群的任意子群都出现于递增正规列中.*

事实上,若在$N$-群$G$中给一子群$A$, 则可以如下构造一个递增正规列$[A_\alpha]$: 设$A_0=E$, $A_1=A$, 然后, 对非极限的$\alpha$取子群$A_{\alpha-1}$的正规化子作为$A_\alpha$, 而对极限序数$\alpha$取所有$A_\beta$, $\beta<\alpha$之并作为$A_\alpha$. 显然此列达到群$G$. 反之, 若群$G$的任一子群都出现在某递增正规列中,则任意真子群必是某较大子群中的正规子群, 随之, 它异于自己的正规化子.

利用这个结果, 容易证明, *$N$-群的任意子群和任意商群本身也是$N$-群.* 因为, 若在$N$-群$G$中给一子群$A$, 它本身又含有子群$B$, 则群$G$通过$B$的递增正规列与$A$之交去掉重复项之后便是$A$中的递增正规列. 这就证明了,$A$是$N$-群.

$N$-群这一概念的自然推广就是$\widetilde{N}$-群的概念; 这指的是这类群,它的任一子群出现在某一正规系中. 与上面对待$N$-群一样可以证明,*$\widetilde{N}$-群的任意子群和任意商群本身也是$\widetilde{N}$-群.*

这里指出,不是任意$Z$-群都是$\widetilde{N}$-群——否则所有自由群将是$\widetilde{N}$-群,而因此它们的商群,这也就是所有群都将是$\widetilde{N}$-群, 但这显然是不可能的. 每一$\widetilde{N}$-群是否有性质$Z$的问题现在尚未解决.

下面的定理指出定义$\widetilde{N}$-群的另一个形式.

*群$G$是$\widetilde{N}$-群当且仅当群$G$具有下面的性质: 若是其子群$A$含于子群$B$内且$A, B$之间没有其他子群, 则$A$必是$B$中的正规子群.*

事实上,我们知道,子群$B$本身也是$\widetilde{N}$-群,故子群$A$含在其某个正规系中. 但由于在$A$, $B$之间没有中间子群,故这两个子群在此正规系中组成一个桥,亦即$A$是$B$中的正规子群.

为了证明反面断语,我们在群$G$中取任意子群$A$而来证明,它

含在某一正规系中．为此，看子群系

$$E \subset A \subset G,$$

它当然不一定是正规系，我们把它加密到已不能再加密的子群有序系．此新得到的系显然是完备的．其次，在此系的任意一个桥处已不能再添加中间子群了，这样由定理条件可得，任意桥的第一个群是其第二个群中的正规子群，亦即我们所构成的子群系是正规的．

Baer[24]中对 $\widetilde{N}$-群证明了局部定理．

*局部地有性质 $\widetilde{N}$ 的群是 $\widetilde{N}$-群．*

设群 $G$ 具有局部系，它由有性质 $\widetilde{N}$ 的子群 $U^{\alpha}$ 组成，并设在 $G$ 中给定子群 $A$ 和 $B$，$A \subset B$ 且在 $A$ 和 $B$ 之间没有其他子群．若 $A$ 不是 $B$ 中的正规子群，则可找到元素 $a \in A$，$b \in B$ 且 $b \notin A$，使得

$$c = b^{-1}ab \notin A.$$

然而易见 $c \in B$．由之得 $\{A, c\} \neq A$，而因此 $\{A, c\} = B$．随之，存在子群 $A$ 的有限子集 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得元素 $b$ 可以通过这些元素以及元素 $c$ 表示．在给定的局部系中可得子群 $U$，它包含元素 $a$，所有元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 以及元素 $c$．因此 $b \in U$，但

$$b \notin V = U \cap A.$$

若用 $W$ 表示含子群 $V$ 但不含元素 $b$ 的子群 $U$ 中一个极大者，则在子群 $W$ 和 $\{W, b\}$ 之间已不再有中间子群了．注意到 $U$ 是 $\widetilde{N}$-群，由之便得 $W$ 是 $\{W, b\}$ 中的正规子群，又因为

$$a \in V \subseteq W,$$

故有

$$c = b^{-1}ab \in W.$$

但元素 $b$ 是可由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $c$ 表示的，故现在也应在 $W$ 中，而这和假设是矛盾的．定理证完．

*局部幂零群* 称群 $G$ 为*局部幂零的*，如果它有由幂零群组成

的局部系.因为幂零群的任意子群本身也是幂零的,故这个定义等价于说,群$G$的由有限个元素生成的任意子群是幂零的.

局部幂零群的任意子群和任意商群本身也是局部幂零的,这可由对幂零群的相应命题的正确性推得.

所有局部幂零群当然都属于对之有局部定理的任意广义幂零群类,亦即属于$Z$-群类和$\widetilde{N}$-群类.回想一下$Z$-群的定义,我们得到,一个局部幂零群,若不是素数阶循环群,则不可能是单群.

Мальцев[6]证明了下面定理.

任意$ZA$-群是局部幂零的.

事实上,设给出一个$ZA$-群$G$,其递增中心列是

$$E=Z_0\subset Z_1\subset\cdots\subset Z_\alpha=G. \tag{3}$$

称序数$\alpha$为此中心列的长度并假定对具有较小长度递增中心列的所有$ZA$-群,定理已经证明了.——当$\alpha=1$时,也就是对于阿贝尔群,定理显然成立.在$G$中取有限子集,其元素为:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n. \tag{4}$$

若$\alpha$是极限数,则(4)中元素都在某个子群$Z_\beta$, $\beta<\alpha$, 又因为此子群具有长度$\beta$的递增中心列而$\beta<\alpha$,故依归纳假设,子群$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是幂零的.

今设$\alpha$不是极限数.此时有极限数$\beta$和自然数$k$,使$\alpha=\beta+k$.自集(4)中任选$k+1$个元素,取所有可能的形如$[\cdots[[a_{i_1}, a_{i_2}], a_{i_3}]\cdots a_{i_{k+1}}]$的高次换位子.这样的换位子共有限个,它们都在子群$Z_\beta$中,但$\beta$是极限数,故必落在某个子群$Z_\gamma$, $\gamma<\beta$中.设

$$H=\{Z_\gamma, a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

依下法在$H$中构造一个递增中心链.取列(3)中一直到$Z_\gamma$的那一截为此链的开始部分,然后是$Z'_{\gamma+1}$,它对应于商群$H/Z_\gamma$的中心,再下面是$Z'_{\gamma+2}$,它对应于商群$H/Z'_{\gamma+1}$的中心,等等.因为子群$Z'_{\gamma+1}$显见包含(4)中任意$k$个元素的所有高次换位子,故子群$Z'_{\gamma+2}$

包含(4)中 $k-1$ 个元素的所有高次换位子，等等．这样，这个递增中心链不超过 $k$ 步便达到群 $H$，亦即变成递增中心列，其长度不超过 $\gamma+k$．因为 $\beta$ 是极限数而 $\gamma<\beta$，则 $\gamma+k$ 真小于 $\beta$ 因而更小于 $\alpha$．由之依归纳假设得到子群 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的幂零性．定理证完．

利用这个结果，Плоткин[2]证明了下面的定理：

*$N$-群是局部幂零的.*

证明利用下面的一些引理．

**引理 1**(Шмидт[6])．*若 $N$-群 $G$ 的正规子群 $H$ 具有非平凡中心 $Z$ 且商群 $G/H$ 是循环群，则群 $G$ 本身也有非平凡中心.*

依假设，在 $G$ 中有元素 $a$，使

$$G=\{H, a\}.$$

中心 $Z$ 是 $H$ 的特征子群，故是 $G$ 中的正规子群．另一方面，作为 $N$-群的子群，$\{Z, a\}$ 本身也是 $N$-群，因此或者 $Z\subset\{a\}$，或者子群 $\{a\}$ 在 $\{Z, a\}$ 中有异于自己的正规化子．$\{Z, a\}$ 中的元素具有形状 $za^k$，$z\in Z$，因此在两种情况下子群 $\{a\}$ 在 $\{Z, a\}$ 的正规化子都含有 $Z$ 中异于 1 的元素 $z$．如果换位子 $[z, a]$ 等于 1，则由于 $z$ 在群 $H$ 的中心内，且它与 $a$ 也可交换，知 $z$ 属于群 $G$ 的中心．若是换位子 $[z, a]$ 异于 1，则它也在群 $H$ 的中心 $Z$ 中，而由于元素 $z$ 的选择，它也在子群 $\{a\}$ 中，故知 $[z, a]$ 含在群 $G$ 的中心中．

**引理 2.** *若 $N$-群 $G$ 的正规子群 $H$ 有递增中心列而商群 $G/H$ 是循环群，则群 $G$ 本身也是 $ZA$-群.*

依引理 1 群 $G$ 有非平凡中心 $Z_1$．设在群 $G$ 中已对所有小于 $\beta$ 的 $\alpha$ 作出上中心链的各项 $Z_\alpha$．若 $\beta$ 是极限数，则令 $Z_\beta$ 是所有 $Z_\alpha$ 之并．若是序数 $\beta-1$ 存在，则作为 $ZA$-群 $H$ 的商群，群

$$HZ_{\beta-1}/Z_{\beta-1}\simeq H/(H\cap Z_{\beta-1})$$

具有非平凡中心，而群 $G/Z_{\beta-1}$ 是它借助循环群的扩张，因而再依

引理 1，群 $G/Z_{\beta-1}$ 的中心也是非平凡的．此中心在 $G$ 内的完全原象记作 $Z_\beta$．随之，群 $G$ 的上中心链在未达到群 $G$ 之前是不可能停稳下来的．

**引理 3.** *若在 $N$-群 $G$ 中给定元素 $a$ 和 $x$ 且若*

$$x_1=x,\quad x_{i+1}=[x_i,a],\qquad i=1,2,\cdots,$$

*则存在 $k$，使 $x_k=1$.*

事实上，设 $A_1=\{a\}$．依 $N$-群的定义有含子群 $A_1$ 的群 $G$ 的递增正规列，

$$E=A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_\alpha\subset\cdots\subset G. \tag{5}$$

设所有元素 $x_i$ 异于 1 并设 $A_{\alpha_i}$ 是列(5) 中含元素 $x_i$，$i=1,2,\cdots$ 的子群中的最小者．足码 $\alpha_i$ 不会是极限序数．另一方面，它不可能是 1，因为那样我们将有 $x_{i+1}=1$ 而与假设矛盾．由之得 $\alpha_i-1$ 存在且异于零，因而有

$$a\in A_{\alpha_i-1}.$$

因为列(5)是正规的，故也有

$$x_i^{-1}a^{-1}x_i\in A_{\alpha_i-1},$$

因而还有

$$x_i^{-1}a^{-1}x_i\cdot a=x_{i+1}\in A_{\alpha_i-1}.$$

这就证明了，足码 $\alpha_i$ 组成严格递降叙列

$$\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_i>\cdots,$$

但这和列(5)的良序性相矛盾．

**引理 4.** *若 $H$ 是 $N$-群 $G$ 的局部幂零正规子群，且 $G=\{H,a\}$，则群 $G$ 也是局部幂零的.*

群 $G$ 的任一有限子集可通过元素 $a$ 以及 $H$ 中有限多个元素表示，因而只要证明任意形如

$$a,h',h'',\cdots,\ h^{(n)},\ h^{(k)}\in H,\qquad k=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

的元素集合在 $G$ 内生成的子群的幂零性就够了．用 $F$ 表示由元素

$$h^{(k)}=h_1^{(k)},\qquad k=1,2,\cdots,n,\tag{7}$$

以及元素

$$h_{i+1}^{(k)}=[h_i^{(k)},a],\qquad i=1,2,\cdots;\qquad k=1,2,\cdots,n\tag{8}$$

所生成的子群.

(7), (8)中的所有元素都在$H$中，依引理3，其中异于1的元素只有有限个，因而子群$F$是幂零的. 其次，$F$在由(6)中元素生成的子群$\bar{F}$中是正规子群，这是因为

$$a^{-1}h_i^{(k)}a=h_i^{(k)}h_{i+1}^{(k)}.$$

商群$\bar{F}/F$是循环群，因此依引理2, $\bar{F}$是$ZA$-群. 最后，利用子群$\bar{F}$生成元个数的有限性以及上面证过的$ZA$-群是局部幂零的定理可得，子群$\bar{F}$是幂零的.

**现转来证明定理.** 在$N$-群$G$中可以构造一个递增正规列

$$E=H_0\subset H_1\subset H_2\subset\cdots\subset H_\alpha\subset\cdots\subset H_\gamma=G\tag{9}$$

使得

$$H_{\alpha+1}=\{H_\alpha,a_\alpha\},\ 0\leqslant\alpha<\gamma,\tag{10}$$

其中$a_\alpha$属于$H_\alpha$在群$G$中的正规化子而不属于$H_\alpha$. 若群$G$不是局部幂零的，则令$H_\alpha$是列(9)的子群中第一个不是局部幂零者. $\alpha$不能是极限数，因为局部幂零群递增叙列之并仍是局部幂零的. 子群$H_{\alpha-1}$已经是局部幂零的，故依引理4我们便得到矛盾. 定理证完(参看补充25.3).

与此定理有关的我们指出下面一点，在Черников [4] 和Шмидт[6] 中可以看到是局部幂零的但不满足正规化子条件的群的例子(参看补充25.1).

## §64. 与可解群的关系. $S$-群. 附加有限条件

我们知道，所有幂零群都是可解的. 与此类似地对于每一广义幂零群类可以至少指出一个包含它的广义可解群类.

显然有下列断语：任意 $Z$-群是 $RI$-群，任意局部幂零群是局部可解群，而任意 $ZA$-群属于 $RI^*$-群类.

对于 $ZA$-群还可以指出一个含有它们的广义可解群类(参看 Baer[30]；而关于证明参看Черников[3]).

任意 $ZA$-群 $G$ 是 $RK$-群.

事实上，若群 $G$ 是阿贝尔的，则没有什么可证的. 若是它是不交换的，则我们利用下面的 Grün 引理(Grün[1]).

若群 $G$ 有异于 1 的中心 $Z$ 且若商群 $G/Z$ 的中心也异于 1，则存在一个同态对应，它把 $G$ 映到群 $Z$ 中异于 1 的一个子群上.

事实上，引理的假设说明，在群 $G$ 的递增中心链中子群 $Z_2$ 异于子群 $Z_1=Z$. 在 $Z_2$ 中取定一个不在 $Z$ 中的元素 $a$，并令 $G$ 中任意元素 $x$ 与换位子$[a, x]$相对应. 由于元素 $a$ 属于与群 $G/Z$ 的中心相对应的子群 $Z_2$ 中，可得$[a, x]\in Z$，而由 $a\notin Z$ 可得：必有 $x_0$，使$[a, x_0]\neq 1$. 我们得到的这个 $G$ 到 $Z$ 内的非平凡映射还是同态对应，这只要证明等式

$$[a, x]\cdot[a, y]=[a, xy].$$

而由$[x, a^{-1}]\in Z$，确有

$$\begin{aligned}[a, x]\cdot[a, y]&=a^{-1}x^{-1}axa^{-1}y^{-1}ay\\&=a^{-1}y^{-1}(x^{-1}axa^{-1})ay=[a, xy].\end{aligned}$$

由此引理得，非交换 $ZA$-群 $G$ 具有非平凡的阿贝尔商群，因而 $G$ 异于自己的换位子群. 因为 $ZA$-群的任意子群本身是 $ZA$-群，故定理证完.

最后，我们来证明下列定理.

任意 $\widetilde{N}$-群是 $\overline{RN}$-群.

事实上，$\widetilde{N}$-群 $G$ 的任意正规系可以加密成子群的良序系，使得它的任意桥中都不能再添加中间群. 因之依性质 $\widetilde{N}$，任意桥的第一子群是该桥的第二个子群中的正规子群，亦即此系是正规的，

并且其所有因子显然都是素数阶循环群.

任意 $N$-群都是 $RN^*$-群.

事实上,在上节末在任意$N$-群中建立了具有性质(10)的递增正规列(9). 显然,此列的因子都是循环群.

具有循环因子不变系的群. 显然在任意阿贝尔群中存在具有循环因子的递增不变列. 利用此可证明, 任意 $ZA$-群也有具循环因子的递增不变列,而任意$Z$-群有具循环因子的不变系.

事实上,若给定,例如,一个具中心系 $\mathfrak{A}=[A_\alpha]$的$Z$-群 $G$,则在此系的任意桥 $A_\alpha, A_{\alpha+1}$ 处可以如上面说过的那样填补一个具循环因子的递增列.此列的所有项都是群 $G$ 中的正规子群,这是因为因子 $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ 含在商群 $G/A_\alpha$ 的中心中.

逆命题对于有限群就已经不成立了. 例如, 3 次对称群有具循环因子的主列,但不是幂零群. 这样,就出现一个介于可解群和幂零群之间的群类.

有下面的定理(Черников[7]), 在有限群的情况, 它就变为 Вендт 定理.

一个群,若有具循环因子的不变系,则必是 $Z$-群.

设在群 $G$ 中存在有具循环因子的不变系 $\mathfrak{A}=[A_\alpha]$; 因为循环群的所有子群都是该群的特征子群, 故可以认定系 $\mathfrak{A}$ 的所有因子都是有限的. 设 $K$ 是群 $G$ 的换位子群. 所有交

$$B_\alpha=A_\alpha\cap K,$$

在去掉重复项以后组成群$K$的不变系 $\mathfrak{B}$, 它的因子仍是有限循环群. 设 $B_\alpha$, $B_{\alpha+1}$ 是系 $\mathfrak{B}$ 中的一个桥而商群 $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ 是 $n$ 阶循环群,亦即是由元素 $c^iB_\alpha$, $c\in B_{\alpha+1}$, $i=0,1,\cdots,n-1$, 组成的. 若 $x,y$ 是群 $G$ 中的任意元素,则因为子群 $B_\alpha$, $B_{\alpha+1}$ 是 $G$ 中正规子群,故存在指数 $k$ 和 $l$, 使

$$(xB_\alpha)(cB_\alpha)(xB_\alpha)^{-1}=c^kB_\alpha,$$

$$(yB_\alpha)(cB_\alpha)(yB_\alpha)^{-1}=c^lB_\alpha.$$

由之得

$$(xyB_\alpha)(cB_\alpha)(xyB_\alpha)^{-1}=(yxB_\alpha)(cB_\alpha)(yxB_\alpha)^{-1}=c^{kl}B_\alpha,$$

即元素$[x,y]B_\alpha$与元素$cB_\alpha$可换. 这就证明了，商群$B_{\alpha+1}/B_\alpha$属于商群$K/B_\alpha$的中心，即$\mathfrak{B}$是群$K$的中心系. 定理证完.（参看补充 23.4）.

现在至少对于有限群可以指明，具有循环因子不变列的群所占据的真正位置. 我们知道，任意可解群有具阿贝尔因子的不变列. 反之，任意一个群，若有具任意幂零因子的不变列，则是可解群. 这使得我们对可解群可按照它们的具幂零因子的不变列的长度来分类(参看补充 24.6). 若此长度不超过 2，即是若此群是幂零群借助幂零群的扩张，则与亚阿贝尔群类似的称之为**亚幂零群**.

如 Вендт 定理指出的，**具有循环因子不变列的任意有限群是亚幂零群**.

最后我们指出下面定理而略去证明，它涉及到我们所讨论过的群类(Baer[24]，还可参看 Курош，Черников[1]).

**一个$\bar{N}$-群，若它有具循环因子的不变系或者具循环因子的递增不变列，则它是$Z$-群，或者，相应地，是$ZA$-群.**

**$S$-群** 到目前为止我们还未尝试把有限幂零群最重要的定义之一移置到无限群上去，这里指的是这些群可表成$p$-群之积的形式. 此事可依下法来作.

称群$G$是**$S$-群**，如果对于每一素数$p$它有唯一的 Sylow $p$-子群，即是，若在此群内所有有限阶的元素的集合作成一个子群，并且可分解成$p$-群的直积. 称此群为群$G$的**周期部分**.

$S$-群类是很广泛的. 例如，其中包含一切$p$-群，而这些$p$-群本身就组成一个研究得很少的群类. 另一方面，无扭群也满足

$S$-群的定义. 因此我们仅限于讨论 $S$-群与前几节中引入的各种广义幂零群类之间的关系.

首先指出一个下面要用的 $S$-群的一些显见性质: *$S$-群的任意子群本身也是 $S$-群. 反之, 若群 $G$ 具有一由 $S$-子群组成的局部系 $\mathfrak{A}=[A^\alpha]$, 则它本身也是 $S$-群.* 这是因为, 如果我们把所有子群 $A^\alpha$ 的 Sylow $p$-子群的元素合并在一起, 便得到群 $G$ 的唯一 Sylow $p$-子群.

在 §62 已指出过, 所有 $N$-群, 因而还有所有幂零群都是 $S$-群. 因为对性质 $S$ 有局部定理, 故我们还可得到更一般的结果: *任意局部幂零群是 $S$-群.*

另一方面, 不是任意 $Z$-群都是 $S$-群(参看 Мальцев[7]). 对于 $\widetilde{N}$-群相应的问题尚未解决; 一些部分结果在 Baer[24]中.

*附加有限条件.* 可以想象地, 附加这个或那个有限条件将在我们所考察的广义幂零群类之间引出一些补充的联系. 例如, 有下面**定理**.

*对局部有限群来说下列性质彼此等价: $Z, \widetilde{N}, S$ 和局部幂零性.*

事实上, 若局部有限群 $G$ 具有性质 $Z, \widetilde{N}$ 或 $S$, 则所有它的有限子群也具有相应的性质, 即依 §62, 它们都是幂零的, 因而群 $G$ 本身是局部幂零的. 反过来, 若局部有限群 $G$ 是局部幂零的, 则所有它的有限子群具有 $Z, \widetilde{N}$ 和 $S$ 中每一个性质, 而这时由关于这些性质局部定理是成立的, 便得群 $G$ 本身又是 $Z$-群, 又是 $\widetilde{N}$-群, 又是 $S$-群.

在 §59 中证明了周期局部可解群的局部有限性. 由之可得, *任意周期局部幂零群是局部有限的*, 依次地压缩这个结果, 我们就得到*周期 $N$-群, $ZA$-群和幂零群的局部有限性.*

现在对所考虑的群附加*对子群的极小条件*, 显然在此条件下

性质$\widetilde{N}$变成性质 $N$, 而性质 $Z$ 变为性质 $ZA$; 因此依刚刚指出的可知，由极小条件引出的群的周期性在这两个情形的每一种中都变成局部有限性. 这样，上面关于局部有限群证明的定理就导致下面的结果(Черников[3]).

在群对子群满足极小条件的情形下，下列性质彼此等价：1) 性质 $ZA$, 2) 性质 $N$ 和 3) 局部有限性及性质 $S$.

此定理中三个等价的条件所定义的群, 既是周期的, 又有性质 $S$, 因而可分解成 $p$-群的直积. 称满足下列彼此等价的任一个定义的群为 Черников $p$-群：它们是

1) 对子群有极小条件且有递增中心列的 $p$-群;

2) 对子群有极小条件且有正规化子条件的 $p$-群;

3) 对子群有极小条件的局部有限 $p$-群.

对 Черников $p$-群还可以给出一系列其他定义，恰是由于有可能从不同方面来看这些群, 这使得它们特别有兴趣. 例如, 下面两个中的任意一个也可取作 Черников $p$-群的定义:

4) 对子群有极小条件的可解 $p$-群;

5) 对子群有极小条件且具有限指数的完备阿贝尔正规子群.

事实上, 由 1) 可得 4): 如本节开始时指出的，任意 $ZA$-群是 $RI$-群, 因而依 § 59 中的 Черников 定理, 在对子群有极小条件下它是可解的. 另一方面, 由 4) 可得 3)，这是因为在 § 59 中证明了任意周期可解群的局部有限性. 最后, 定义 4) 和 5) 的等价性可直接由上面指出过的 Черников 定理得出.

定义 5) 之有趣在于它把刻划所有 Черников $p$-群归结为对有限 $p$-群的刻划: 由于在 § 53 中给出的对有极小条件的阿贝尔群的刻划, 它们就是有限个$p^{\infty}$-型群的直积借助有限$p$-群的一切可能扩张且仅是这些. 我们指出，在 Черников $p$-群中有限指数的

完备阿贝尔正规子群是唯一被确定的 (参看 § 59 中 Черников 定理的证明). 还指出, 在定义 5) 中对有限指数阿贝尔正规子群的完备性要求是可以去掉的, 因为由 § 53我们知道, 任意有极小条件的阿贝尔群有有限指数的完备特征子群.

最后我们给出四个定理而略去证明. 它们可给出 Черников $p$-群的另外一些定义.

*具递增中心列的 $p$-群是 Черников $p$-群, 当且仅当它的上中心列的所有因子满足极小条件* (Мухаммеджан[2]).

*局部有限 $p$-群是 Черников $p$-群, 当且仅当它对阿贝尔子群满足极小条件* (Шмидт[6], Черников[20]).

*具有限特殊秩 (参看 § 53) 的局部有限 $p$-群且仅有它们是 Черников $p$-群* (Мягкова[1]).

*一个 $p$-群和特征零的域上某个矩阵群同构当且仅当它是 Черников $p$-群.*

附加其他有限条件没有引出较完整的理论而我们将限于指出不多的一些结果.

*在对子群有极大条件下任意局部幂零群都是幂零的,* 这是因为由极大条件可得生成元个数是有限的(参看 § 53). 由前一节中的 Плоткин 定理可知, 此结果包含 Hirsch[5] 中证明的一个定理: 对子群满足极大条件的 $N$-群是幂零的.

在 Мягкова[1] 和 Мальцев[10] 中指出了一些其他有限条件, 当它们被满足时由群的局部幂零性可得出幂零性.

最后我们介绍下面的定理 (Baer[32]; 下述证明属于 Ю. Г. Федоров). 这个定理指出, 对于幂零群对子群的极大条件可换成更简单的假设.

*若幂零群 $G$ 关于其换位子群的商群有有限个生成元, 则群 $G$ 下中心列的所有因子也有有限个生成元, 而群本身对子群满足极*

大条件. 随之, 对于幂零群, 对子群有极大条件和生成元个数的有限性是等价的.

关于幂零群的类作归纳法来证明, 因为对阿贝尔群定理是显然的. 设

$$G=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_{k-1}\supset G_k\supset G_{k+1}=E \tag{1}$$

是群 $G$ 的下中心列. 对于商群 $G/G_k$ 其下中心列是

$$G/G_k\supset G_1/G_k\supset\cdots\supset G_{k-1}/G_k\supset G_k/G_k=E,$$

故依归纳假设, 定理对 $G/G_k$ 是成立的. 由之得群 $G/G_k$ 有有限生成元组

$$x_1G_k,\ x_2G_k,\ \cdots,\ x_sG_k.$$

由之还得, 在列(1)的所有因子中, 除去最后一个, 都有有限生成元组; 特别, 因子 $G_{k-1}/G_k$ 有有限生成元组

$$y_1G_k,\ y_2G_k,\ \cdots,\ y_tG_k.$$

其次, 我们知道子群 $G_k$ 在群 $G$ 的中心内并由所有形如 $[x, y]$, 其中 $x\in G$, $y\in G_{k-1}$, 的换位子生成的. 但元素 $x$ 可表成由元素 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 作成的字 $v$ 乘以 $G_k$ 中的元素, 也就是乘以中心中的元素的形式; 类似地元素 $y$ 可表成 $y_1, y_2, \cdots, y_t$ 的字 $w$ 也乘以中心中的元素的形式. 随之换位子 $[x, y]$ 等于字 $v$ 和 $w$ 的换位子. 但后面这个换位子可表成换位子 $[x_i, y_j]$, $i=1, 2, \cdots, s$; $j=1, 2, \cdots, t$, 之幂的乘积——为此只需利用 §14 中换位子的性质(1)—(4)并注意到 $G$ 中元素和 $G_{k-1}$ 中元素的任意换位子都属于群 $G$ 的中心. 这就证明了子群 $G_k$ 有有限生成元组. 因此列(1)的所有因子都有有限生成元组, 又因为幂零群 $G$ 是可解的而(1)是它的可解列, 故依 §59 中 Hirsch 定理, 在 $G$ 中对子群极大条件被满足.

Baer[32]也包含一系列其他结果, 与刚证过的相近或者是它的推广(参看补充 27.2).

## § 65. 完备幂零群

我们知道，在阿贝尔群的理论中完备阿贝尔群起着重要的作用；在 § 23 中给出了它们的完整刻划. 完备群的定义不难移置到非交换群上去，即是：群 $G$ 叫作完备的，如果对其中任意元素 $a$ 和任意自然数 $n$，方程

$$x^n = a$$

在 $G$ 中至少有一个解，亦即任意元素都可开任意次方.

任意完备群可以有非常复杂的结构. 但是，很自然地可以指望，最接近完备阿贝尔群的完备幂零群能够成为有深入理论的对象. 本节用来叙述 Черников[10, 13]. 这时看来适当的是不局限于完备幂零群，而直接研究任意完备 $ZA$-群，然而这里得到的一些结果已不能推广到完备局部幂零群上去.

将称群 $G$ 在 Черников 意义下是完备的，如果对任意自然数 $n$，它由其所有元素的 $n$ 次幂生成. 任意完备群显然是 Черников 意义下的完备的. 逆命题对阿贝尔群是显然的，但对一般情况是不成立的，而对 $ZA$-群将在一系列预备讨论之后来证明. 在得到这个结果之前我们将把完备群理解为在 Черников 意义下的完备群，为了避免累赘的叙述，将不再每次声明.

*$ZA$-群是完备的当且仅当它不包含具有限指数的真子群.*

事实上，如果完备群 $G$，甚至不一定是 $ZA$-群，含有具有限指数的真子群，则在其中也必有有限指数的正规子群. 但是完备群不能有非平凡的有限商群，这是因为完备群的同态象本身是完备的，而异于 $E$ 的有限群永远不会是完备的——这只要取此群的阶为数 $n$ 即看出.

反之，设 $ZA$-群 $G$ 不含具有限指数的真子群并设 $n$ 是任意自然数. 用 $H$ 表示群 $G$ 的所有元素之 $n$ 次幂生成的子群. 需要证明

$G=H$. 如果不是这样,则由于$H$是$G$的正规子群，我们来考察商群$G/H$. 它或者本身是阿贝尔的，或者是$ZA$-群，而依§64中Grün引理,具有非平凡阿贝尔商群. 在两种情形下,我们都得出,群$G$有一个非平凡阿贝尔商群,而此商群中元素的阶总体有界. 根据Prüfer第一定理(§24)，这样的阿贝尔群可分解成循环群的直积，因此含有限指数的真子群，而它对应着群$G$的有限指数真子群,但这和假设矛盾. 定理证完.

*完备$ZA$-群$G$的周期部分含在此群的中心内.*

事实上,设

$$E=Z_0\subset Z_1\subset\cdots\subset Z_\alpha\subset Z_{\alpha+1}\subset\cdots\subset Z_r=G$$

是群$G$的上中心列而$a$是此群中异于1的有限阶元素,

$$a^n=1. \tag{1}$$

存在有$\alpha$,使

$$a\notin Z_\alpha,\quad a\in Z_{\alpha+1}.$$

需要证明：$\alpha=0$.

设$\alpha=1$. 今证，对$G$中任意元素$x$,元素$x^n$与$a$交换. 事实上,子群$H=\{a, x\}$是幂零的,因为$a\in Z_2$,其类不大于2，故由§14中的$(3')$和$(4')$有

$$[a, x^n]=[a, x]^n=[a^n, x]=[1, x]=1.$$

因为由群$G$的完备性其任意元可表示成某些元素$n$次幂的乘积,故得$a$在群$G$的中心中,这和假设$\alpha=1$是矛盾的.

设$\beta$是某一大于1的序数,并设已经证明不可能有不等式$1\leqslant\alpha<\beta$. 令$\alpha=\beta$. 此时$a\in Z_{\beta+1}$,因此对$G$中任意$x$,换位子$[x, a]$在$Z_\beta$中. 但

$$[x, a]=(x^{-1}a^{-1}x)a.$$

右侧是两个有限阶元素的乘积,因此元素$[x, a]$也属于群$G$的周期部分,亦即有有限阶. 因此依归纳假设得,此换位子作为$Z_\beta$中元素

应当还属于群 $G$ 的中心 $Z_1$. 因为元素 $x$ 是任意的,故得实际上有 $a\in Z_2$, 这和假设 $\beta>1$ 是矛盾的.

定理证完. 从它可推得,*任意周期完备 $ZA$-群是阿贝尔的*. 在 Мухаммеджан [2] 中可找到此最后结果的一些推广. 但是把它推广到任意周期完备局部幂零群上去是不可能的,这可由 Черников[10]中给出的非交换完备局部有限 $p$-群的例子看出.

*若完备 $ZA$-群 $G$ 的周期部分 $F$ 是有限的,则 $F=E$, 即 $G$ 是无扭群. 此外, $G$ 在这种情况具有递增中心列,其所有因子都是无扭完备阿贝尔群. 还可认定所有因子的秩都是 1.*

上面已经证明, 子群 $F$ 含在群 $G$ 的中心内. 若群 $G$ 是阿贝尔的,则全部证完,因为完备阿贝尔群的周期部分或者等于 $E$ 或者是无限的, 而无扭完备阿贝尔群可分解成一些同构于有理数加群的群的直积(参看 §23). 在另外情况依 Grün 引理(§64)在 $Z$ 中存在有非平凡子群, $G$ 可同态地映到其上. 它作为完备群的同态象还是完备群. 用 $L_1$ 表示群 $Z$ 的任意完备子群;并且还可认定它有秩 1. 作为中心的子群, $L_1$ 是群 $G$ 的正规子群. 其次,由上面关于完备阿贝尔群的周期部分说过的,知

$$L_1\cap F=E.$$

最后,商群 $G/L_1$ 的周期部分与 $FL_1/L_1$ 重合,因而是有限的. 这是因为, 若元素 $aL_1$ 在此商群中有有限阶 $n$, 则 $a^n\in L_1$. 因为 $L_1$ 是完备阿贝尔群, 故在其中可找到元素 $b$, 使 $a^n=b^n$, 由之注意到 $b$ 在中心内有, $(ab^{-1})^n=1$, 即 $ab^{-1}\in F$; 因此

$$aL_1=(ab^{-1})L_1\in FL_1/L_1.$$

设在 $G$ 中已构造出严格递增正规子群链

$$L_1\subset L_2\subset\cdots\subset L_\alpha\subset\cdots, \tag{2}$$

其中 $\alpha$ 小于某个序数 $\beta$, 并且对所有 $\alpha$

$$L_\alpha\cap F=E,$$

商群 $G/L_\alpha$ 的周期部分等于 $FL_\alpha/L_\alpha$,而因子 $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ 当 $\alpha+1<\beta$ 时属于群 $G/L_\alpha$ 的中心且是无扭完备阿贝尔群. 若 $\beta$ 是极限数,则取 $L_\beta$ 为所有 $L_\alpha$, $\alpha<\beta$ 之并. 它是群 $G$ 的一个正规子群并且它和 $F$ 之交等于 $E$. 现在来找出商群 $G/L_\beta$ 的周期部分. 若陪集 $aL_\beta$ 在 $G/L_\beta$ 中有有限阶 $n$, 即 $a^n\in L_\beta$, 则存在 $\alpha$, 小于 $\beta$ 而有 $a^n\in L_\alpha$. 因此依归纳假设,陪集 $aL_\alpha$ 含在商群 $FL_\alpha/L_\alpha$ 中,即是

$$aL_\alpha=cL_\alpha,\quad c\in F,$$

而此时便有

$$aL_\beta=cL_\beta,$$

即 $aL_\beta\in FL_\beta/L_\beta$.

今设 $\beta-1$ 存在. 商群 $G/L_{\beta-1}$ 满足最初的群 $G$ 所满足的一切条件. 因而在其中心内可找到非平凡完备正规子群 $L_\beta/L_{\beta-1}$, 它和群 $G/L_{\beta-1}$ 的周期部分 $FL_{\beta-1}/L_{\beta-1}$ 之交等于 $E$. 由此得

$$L_\beta\cap FL_{\beta-1}=L_{\beta-1},$$

又因为依归纳假设, $L_{\beta-1}\cap F=E$, 故也有

$$L_\beta\cap F=E.$$

其次,商群

$$(G/L_{\beta-1})/(L_\beta/L_{\beta-1})$$

的周期部分等于

$$(FL_{\beta-1}/L_{\beta-1})\cdot(L_\beta/L_{\beta-1})/(L_\beta/L_{\beta-1}),$$

由此得商群 $G/L_\beta$ 的周期部分等于 $FL_\beta/L_\beta$. 最后, 我们提一下, 其实群 $L_\beta/L_{\beta-1}$ 可以选成其秩等于 1 者.

这样,只要某个 $L_\alpha$ 尚未与 $G$ 重合,严格递增链(2)就可以继续下去. 因为子群 $F$ 和任意 $L_\alpha$ 之交等于 $E$, 这种情况当 $F\neq E$ 时是不可能出现的. 因而证得 $F=E$. 达到群 $G$ 本身的递增链(2)现在就变成为我们要找的此群的递增中心列. 定理的最后一个结论可以在证明过程所作的注记得出.

现在我们来证明一个定理，若是用本节开始时给出的完备性定义，则是完全没有什么好证的.

*完备 $ZA$-群 $G$ 的周期部分 $F$ 本身是完备的.*

若子群 $F$ 含有有限指数的真子群 $F_0$，则后者作为中心的子群是 $G$ 中的正规子群. 商群 $G/F_0$ 是完备的且是 $ZA$-群，但它的周期部分 $F/F_0$ 是有限的且异于 $E$，这和上面证过的矛盾. 由此得子群 $F$ 不能有有限指数的真子群，因而作为阿贝尔群它应是完备的，这例如由本节第一个定理可以得出. 定理证完.

利用这个和前面的一些结果，来证**定理**:

*任意完备 $ZA$-群 $G$ 具有递增中心列*

$$E \subseteq L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_\alpha \subset \cdots \subset L_\nu = G, \qquad (3)$$

*其中 $L_0$ 是周期完备阿贝尔群，可能与 $E$ 是重合的，而所有以后的因子都是无扭完备阿贝尔群. 还甚至可认定，这些因子的秩都是 1.*

事实上，$L_0$ 应取为群 $G$ 的周期部分. 如上所示，它在中心内且是完备的. 对它的商群将是无扭完备 $ZA$-群，因而剩下来的只是用一下上面证明过的定理.

现在已经可以证明下面定理了.

*若 $ZA$-群 $G$ 在 Черников 意义下是完备的，则它在本节最初定义下也是完备的.*

设给定群 $G$ 的一个元素 $a$ 和自然数 $n$. 需要证明方程

$$x^n = a$$

在群 $G$ 中至少有一个解. 按照前一定理在群 $G$ 中构造递增中心列 (3). 存在 $\alpha$，使

$$a \notin L_\alpha, \quad a \in L_{\alpha+1}.$$

因为商群 $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ 是完备阿贝尔的，故在 $L_{\alpha+1}$ 中有元素 $x_1$，使得

$$aL_\alpha = (x_1 L_\alpha)^n,$$

由此

$$a=x_1^n a_1, \quad a_1 \in L_\alpha. \tag{4}$$

存在足码 $\alpha_1, \alpha_1<\alpha$, 使得

$$a_1 \notin L_{\alpha_1}, \quad a_1 \in L_{\alpha_1+1}.$$

我们知道商群 $L_{\alpha_1+1}/L_{\alpha_1}$ 是完备阿贝尔群且属于商群 $G/L_{\alpha_1}$ 的中心. 随之在 $L_{\alpha_1+1}$ 中有元素 $x_2$, 使得

$$a_1 L_{\alpha_1}=(x_2 L_{\alpha_1})^n.$$

由此依(4)

$$aL_{\alpha_1}=(x_1 L_{\alpha_1})^n (x_2 L_{\alpha_1})^n=(x_1 x_2)^n L_{\alpha_1},$$

故有

$$a=(x_1 x_2)^n a_2, \quad a_2 \in L_{\alpha_1}.$$

设已找到足码的递降有限组

$$\alpha>\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_{s-1},$$

并且

$$a=(x_1 x_2 \cdots x_s)^n a_s, \quad a_s \in L_{\alpha_{s-1}}.$$

此时有足码 $\alpha_s, \alpha_s<\alpha_{s-1}$, 使得

$$a_s \notin L_{\alpha_s}, \quad a_s \in L_{\alpha_s+1}.$$

重复前面的讨论, 我们将可得到

$$a=(x_1 x_2 \cdots x_s x_{s+1})^n a_{s+1}, \quad a_{s+1} \in L_{\alpha_s}.$$

有限步之后便有

$$a=(x_1 x_2 \cdots x_t)^n a_t,$$

其中 $a_t \in L_0$ 或当 $L_0=E$ 时 $a_t \in L_1$. 在完备阿贝尔群 $L_0$ 中(或 $L_1$)有元素 $x_{t+1}$, 使

$$a_t=x_{t+1}^n,$$

又因为 $x_{t+1}$ 在群 $G$ 的中心中, 则

$$a=(x_1 x_2 \cdots x_t x_{t+1})^n,$$

而这也就是要证的.

从现在开始我们将把群的完备性理解为群的所有元素可以无限制开方.

下面这个基本定理相当完美地刻划了完备 $ZA$-群的结构；在交换群的情况它变为我们熟知的关于完备阿贝尔群结构的刻划.

在任意完备 $ZA$-群 $G$ 中可以找到子群系

$$A_0, A_1, A_2, \cdots, A_\alpha, \cdots, \alpha<\gamma, \tag{5}$$

具有下列性质:

1) 每一个子群 $A_\alpha, 0\leqslant\alpha<\gamma$, 或者是关于某一素数 $p$ 的 $p^\infty$-型群或者同构于所有有理数的加群.

2) 由所有子群 $A_\alpha, 0\leqslant\alpha<\beta$ 生成的子群 $B_\beta, 0\leqslant\beta<\gamma$, 是群 $G$ 的正规子群.

3) 对所有 $\beta, 0<\beta<\gamma$,

$$B_\beta \cap A_\beta = E.$$

4) $B_\gamma = G$.

反过来, 一个群 $G$, 若有子群系(5)且此系有性质 1)—4), 则是完备 $ZA$-群.

**证明.** 设 $G$ 是完备 $ZA$-群. 上面已证过, 它有递增中心列

$$E\subseteq L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_\alpha\subset\cdots\subset L_\gamma=G,$$

且 $L_0$ 是周期完备阿贝尔群而所有因子 $L_{\alpha+1}/L_\alpha, \alpha=0,1,\cdots$, 都是秩为 1 无扭完备阿贝尔群. 若子群 $L_0$ 异于 $E$, 则它分解成关于某些 $p$ 的 $p^\infty$-型群的直积; 设它们是群 $A_0, A_1, \cdots, A_\alpha, \cdots$, 其中 $\alpha$ 小于某个序数 $\delta$. 这样当 $0<\beta<\delta$ 时条件 3) 被满足. 此外, 因为子群 $L_0$ 在群 $G$ 的中心内, 故当 $0<\beta\leqslant\delta$ 时条件 2) 被满足.

其次, 我们知道 $L_\alpha, \alpha>0$, 是 $G$ 的因而也是 $L_{\alpha+1}$ 的正规子群. 今证群 $L_\alpha$ 的扩张 $L_{\alpha+1}$ 可裂.

设 $x_1$ 是任一个在 $L_{\alpha+1}$ 中而不在 $L_\alpha$ 内的元素. 归纳地定义元素 $x_k, k=2,3,\cdots$: 元素 $x_k$ 是方程

$$x^k = x_{k+1}$$

的一个解，由群 $G$ 的完备性它是存在的．因为陪集 $x_1L_\alpha$ 在商群 $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ 中有无限阶，故元素 $x_1$ 的阶也是无限的，且此外还有

$$\{x_1\} \cap L_\alpha = E.$$

这样，元素 $x_1$ 含在某个和有理数加群同构的子群(参看 § 7)；用 $A'_\alpha$ 表示此子群．

由等式

$$(x_kL_\alpha)^k = x_{k-1}L_\alpha$$

可知，元素 $x_kL_\alpha$, $k=1, 2, \cdots$ 在群 $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ 中生成的子群同构于有理数加群，即同构于群 $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ 本身．但阿贝尔群 $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ 不能分解成直和，因而不能含有真完备子群．这就证明了，在群 $L_{\alpha+1}$ 的关于子群 $L_\alpha$ 的任一陪集中含有一个且只有一个属于 $A'_\alpha$ 的元素，而这也就是要证的．

我们知道

$$B_\delta = \{A_\alpha, 0 \leqslant \alpha < \delta\} = L_0.$$

对 $\beta$ 作归纳法不难确定

$$\{L_0;\ A'_\alpha, 0 \leqslant \alpha < \beta\} = L_\beta, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \gamma.$$

这样，如果取子群系

$$A_{\alpha'}, 0 \leqslant \alpha < \delta;\ A_{\alpha'},\ 0 \leqslant \alpha' < \gamma$$

为系(5)，则定理前半的一切要求都是满足的．

现转来证明定理的后半部．先证引理：

*若群 $G$ 没有真有限指数子群而其正规子群 $A$ 同构于 $p^\infty$-型群或有理数加群，则 $A$ 含在群 $G$ 的中心内．*

先设 $A$ 是 $p^\infty$-型群，$a$ 是它的任一元素．子群 $\{a\}$ 是 $p^n$ 阶循环群．群 $A$ 只有唯一的一个这个阶的子群，因此子群 $\{a\}$ 是 $A$ 的特征子群，随之是 $G$ 的正规子群．因此元素 $a$ 在群 $G$ 内只有有限个共轭元素，又因为依条件在 $G$ 内没有真有限指数子群，故 $a$ 在群 $G$ 的中

心内.

今设群 $A$ 同构于有理数加群. 由 §21 我们知道群 $A$ 的自同构群 $\Gamma$ 同构于非零有理数作成的乘群，即可分解成循环群的直积(参看 §17). 群 $\Gamma$ 的任意子群也就可分解成循环群的直积(参看 §24)，因而不能是完备的.

用群 $G$ 的任一元作群 $A$ 的变形在 $A$ 中诱导出一个自同构. 这使我们得到群 $G$ 到群 $\Gamma$ 的一个子群 $\Gamma'$ 上的一个同态对应. 因为依条件 $G$ 没有真有限指数子群，故在群 $\Gamma'$ 中也没有这样的子群. 随之阿贝尔群 $\Gamma'$ 是完备的，而由上面说过的，因此还有 $\Gamma'=E$. 这就证明了，子群 $A$ 在群 $G$ 的中心内. 引理证完.

设给定一个群 $G$，它有一个具性质1)—4)的子群系(5). 今证，群 $G$ 没有真有限指数子群. 显然在子群 $B_1=A_0$ 中也没有这样的子群，因为它是一个完备阿贝尔群. 设已经证明，在任一子群 $B_\alpha$，$0<\alpha<\beta$，中没有有限指数子群. 若 $\beta$ 是极限数，则在 $B_\beta$ 中也没这样子群，因为 $B_\beta$ 是所有 $B_\alpha, \alpha<\beta$，之并，而 $B_\beta$ 中有限指数子群与任一 $B_\alpha$ 之交仍是此 $B_\alpha$ 中的一个有限指数子群，即应与 $B_\alpha$ 重合.

今设 $\beta-1$ 存在. 若群 $B_\beta$ 含有限指数子群 $H$，则和上面一样有 $H\supset B_{\beta-1}$，因而 $H/B_{\beta-1}$ 将是群

$$B_\beta/B_{\beta-1}\simeq A_{\beta-1}$$

的有限指数子群，但这是不可能的.

这就证明了，在任一子群 $B_\beta$ 中，这里也包括在群 $B_\gamma=G$ 中，没有有限指数子群. 随之，任一商群 $G/B_\beta$，$0<\beta<\gamma$，也不含这样的子群. 由此依引理便得，子群 $B_1=A_0$ 由于它是 $G$ 的正规子群而在群 $G$ 的中心内，而当 $0<\beta<\gamma$ 时，子群 $B_{\beta+1}/B_\beta$ 由于同构于群 $A_\beta$ 且是群 $G/B_\beta$ 的正规子群，故在这最后一个群的中心内. 这样，

$$E\subset B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_\beta\subset\cdots\subset B_\gamma=G$$

是群 $G$ 的递增中心列，即此群是 $ZA$-群. 依本节第一个定理，由在 $G$ 中没有真有限指数子群现在可得此群的完备性. 定理的证明至此结束.

除去上面给出的以外，在 Черников[10, 13, 19]中可以找到完备 $ZA$-群的一系列其他性质. 还可参看 Чарин[3].

## §66. 具有唯一方根的群

当我们研究局部有限群，或者 $p$-群，或者对子群有极小条件的群时，我们都是停留在周期群的范围内. 相对立的情况，亦即无扭群，也是非常有兴趣的.

当然，无扭任意非交换群组成一个异常广泛的群类. 窄得多的一个群类是*具唯一方根群*或者简短些记作 *$R$-群*: 它们是这样一些群，在其中对任意元素 $a$ 和任意自然数 $n$，方程

$$x^n = a$$

有不多于一个解；换句话说，对任意元素 $x$, $y$ 和任意自然数 $n$，由 $x^n = y^n$ 永远可得 $x = y$.

显然，任意 $R$-群是无扭群并且所有无扭阿贝尔群是 $R$-群. 还容易验证，任意自由群是 $R$-群. 另一方面，不是任意无扭群都是 $R$-群. 例如由生成元 $a, b$ 和定义关系式 $a^2 = b^2$ 所确定的群，即两个有相重子群的无限循环群之自由积依 §35 是无扭群，但不是 $R$-群.

Конторович [5, 7] 专门研究了 $R$-群；还可参看 Плоткин [1, 3]. 基本上按照 Конторович [5]，我们将限于指出这些群的一些基本性质.

在 $R$-群的理论中起很大作用的是*纯子群*概念，它是由阿贝尔群论中(参看 §§25, 30)移置来的；但它在这里经常用另外一个名称. $R$-群 $G$ 的子群 $A$ 称作此群的*孤立子群*，如果对 $A$ 中任意元素

$a$ 和任意自然数 $n$ 方程

$$x^n=a$$

若在 $G$ 中有解，则此解属于 $A$.

群 $G$ 本身以及它的单位子群是 $G$ 中孤立子群. 由于方根的唯一性，*R-群的任意多个孤立子群之交本身也是孤立的*. 由此可得在 $R$-群 $G$ 中存在有含给定元素集 $M$ 的唯一极小孤立子群. 这个子群叫作在群 $G$ 中集合 $M$ 的*孤立子*，并记作 $I(M)$.

显然有，*R-群 $G$ 的正规子群 $H$ 是孤立子群当且仅当商群 $G/H$ 是无扭群*. 注意，此商群不一定是 $R$-群.

*若在 R-群 $G$ 中给定一孤立正规子群，并且商群 $G/H$ 是 R-群，则存在于 $G/H$ 的所有子群和 $G$ 中含 $H$ 的所有子群间的自然一一对应使孤立子群相互对应着.*

事实上，设群 $G$ 的子群 $A$ 包含 $H$ 且是孤立的. 若

$$(gH)^n=aH, \quad g\in G, \quad a\in A,$$

则 $g^n=ah\in A$，因此由 $A$ 的孤立性将有 $g\in A$，即 $gH$ 在子群 $A/H$ 中. 反之，设子群 $A/H$ 在群 $G/H$ 中是孤立的. 若

$$g^n=a, \quad g\in G, \quad a\in A,$$

则

$$(gH)^n=aH,$$

即由子群 $A/H$ 的孤立性，元素 $gH$ 在此子群中，因而 $g\in A$.

*R-群中任意子集的中心化子是孤立子群.*

事实上，设在 $R$-群 $G$ 中给定一个集合 $M$. 其次设元素 $x$ 有性质：$x^n$ 属于集合 $M$ 的中心化子，即是对 $M$ 中任意元素 $a$，有 $a^{-1}x^na=x^n$. 由之得

$$(a^{-1}xa)^n=x^n,$$

因而依 $R$-群的定义有

$$a^{-1}xa=x,$$

亦即元素 $x$ 属于集合 $M$ 的中心化子.

由此得, $R$-群的中心是孤立的. 当然这并不是说, $R$-群的中心异于 $E$.

在任意 $R$-群 $G$ 中对任意元素 $a, b$ 由等式

$$a^k b^l = b^l a^k$$

可得

$$ab = ba.$$

只需考虑指数之一, 例如 $l$ 等于 1 的情况, 即 $a^k b = b a^k$ 的情况就够了. 此时

$$(b^{-1}ab)^k = b^{-1}a^k b = b^{-1}ba^k = a^k.$$

由之依 $R$-群定义有

$$b^{-1}ab = a,$$

而这就是要证的.

有下面定理

*无扭群是 $R$-群当且仅当它关于中心的商群是 $R$-群.*

事实上, 我们已经知道 $R$-群 $G$ 的中心 $Z$ 是孤立子群, 因而 $G/Z$ 是无扭群. 设

$$(xZ)^n = (yZ)^n, \quad x, y \in G.$$

由此有

$$x^n = y^n z, \quad z \in Z. \tag{1}$$

此等式说明元素 $x^n$ 和 $y^n$ 之间是可换的, 因而和上面证明过的一样, 知元素 $x$ 和 $y$ 本身也是可换的. 此时由等式(1)便得

$$(y^{-1}x)^n = z,$$

而由 $Z$ 的孤立性得 $y^{-1}x \in Z$, 由此有 $xZ = yZ$.

反之, 设无扭群 $G$ 关于其中心 $Z$ 的商群是 $R$-群. 若

$$x^n = y^n, \tag{2}$$

其中 $x, y$ 是群 $G$ 的元素, 则 $(xZ)^n = (yZ)^n$. 由此, 因为 $G/Z$ 是

$R$-群, 故有

$$xZ=yZ,$$

或 $x=yz, z\in Z$ $n$ 次方后得

$$x^n=y^nz^n.$$

由于(2)有 $z^n=1$, 但 $G$ 是无扭群, 故有 $z=1$, 因此 $x=y$。

依赖上面叙述的结果, 容易证明**定理**:

*$R$-群 $G$ 的上中心链*

$$E=Z_0\subseteq Z_1\subseteq Z_2\subseteq\cdots\subseteq Z_\alpha\subseteq\cdots$$

*中所有项都是 $G$ 中孤立子群, 此链的所有因子(当 $\alpha$ 不是极限数) $Z_\alpha/Z_{\alpha-1}$ 是无扭阿贝尔群, 而对所有 $\alpha$ 商群 $G/Z_\alpha$ 是 $R$-群.*

事实上, 因为 $Z_1$ 是群 $G$ 的中心, 故因子 $Z_1/Z_0=Z_1$ 是阿贝尔群且是无扭的, $Z_1$ 是 $G$ 中孤立子群且商群 $G/Z_1$ 是 $R$-群. 设对所有小于 $\beta$ 的足码 $\alpha$, 定理的所有结论已被证明. 若 $\beta-1$ 存在, 则群 $G/Z_{\beta-1}$ 是 $R$-群. 因此它的中心 $Z_\beta/Z_{\beta-1}$ 是无扭阿贝尔群, 它关于其中心的商群同构于 $G/Z_\beta$, 因而是 $R$-群, 且由中心 $Z_\beta/Z_{\beta-1}$ 在群 $G/Z_{\beta-1}$ 中的孤立性, 并根据上面证过的关于在群及其商群的孤立子群间相互对应的定理可得, $Z_\beta$ 是 $G$ 中孤立子群.

若 $\beta$ 是极限数, 则子群 $Z_\beta$ 是递增孤立子群叙列之并, 因而是孤立的. 另一方面, 若

$$(xZ_\beta)^n=(yZ_\beta)^n, \quad x, y\in G,$$

则 $x^n=y^nz$, 其中 $z\in Z_\beta$, 因而有某个小于 $\beta$ 的 $\alpha$, 使 $z\in Z_\alpha$. 由此有 $(xZ_\alpha)^n=(yZ_\alpha)^n$, 但依假设群 $G/Z_\alpha$ 是 $R$-群, 故 $xZ_\alpha=yZ_\alpha$, 因而更有 $xZ_\beta=yZ_\beta$. 这就证明了, $G/Z_\beta$ 是 $R$-群.

我们指出, *$R$-群的换位子群可以不是孤立的*. 例如, 考察一个由生成元 $a, b, c$ 以及定义关系式

$$ac=ca, \quad bc=cb, \quad [a, b]=c^2$$

给出的群 $G$. 此群的中心是循环子群 $\{c\}$, 因而关于中心的商群是

无扭阿贝尔群，即是 $R$-群，随之依上面证过的定理群 $G$ 本身也是 $R$-群．但它关于换位子群的商群包含 2 阶元素，因此换位子群不是孤立的．

若真是把孤立子群的概念用合理方式移置到任意无扭群上的话，那末 $R$-群的下一个性质可以作为它们的定义．

*$R$-群中任意异于 1 的元素的孤立子是秩为 1 的无扭阿贝尔群，且是其中任一异于 1 的元素的孤立子．$R$-群中任意两个元素的孤立子或者重合，或者其交为 $E$．*

事实上，在任意无扭群 $G$ 中任意异于 1 的元素生成无限循环群，它是秩为 1 的无扭阿贝尔群．因为秩 1 无扭阿贝尔群递增叙列的并仍是这样的群，故元素 $x$ 属于群 $G$ 的至少一个极大的秩 1 无扭阿贝尔子群 $A$ 中．若现在令 $G$ 是 $R$-群，则 $A$ 包含在元素 $x$ 的孤立子 $I(x)$ 中．这是因为，当 $a\in A$ 时循环群 $\{x\}$ 和 $\{a\}$ 有异于 $E$ 的交且同时显然有 $\{x\}\subset I(x)$．

现在设元素 $x$ 含在两个不同的极大秩 1 无扭阿贝尔子群 $A, B$ 中；随之这两个子群之交异于 $E$．设 $a$，$b$ 依次为 $A$ 和 $B$ 中任意异于 1 的元素．因为这些元素的某些幂相等因而是可换的，故由上面证过的 $R$-群性质知，元素 $a$ 和 $b$ 本身也是可换的．这样，子群 $\{A, B\}$ 是无扭阿贝尔群．但在这样的群中秩 1 的极大子群，如果它们不相同的话，不能有异于 $E$ 的交（参看 § 30)，由之不难得到定理的所有结论（参看补充19.1)．

在幂零群的理论中 $R$-群的意义由下面这个定理（Мальцев [6]，Черников[19]；下述证明见Сесекин[1]）确定了．

*任意无扭幂零群是 $R$-群．*

对于无扭阿贝尔群没什么可证的，因此可对幂零群的类作归纳法来证明．设给一 $k$ 类群 $G$，$k>1$，具有上中心列

$$E=Z_0\subset Z_1\subset\cdots\subset Z_{k-1}\subset Z_k=G$$

并设在其中有元素 $x, y$, 使

$$x^n = y^n, \quad n > 0.$$

因为因子 $G/Z_{k-1}$ 是阿贝尔群, 故子群 $H = \{Z_{k-1}, x\}$ 是 $G$ 中正规子群; 其次, $H$ 是幂零的且它的类不大于 $k-1$, 这是因为, 还是在 §11 就曾证明过, 非可换群关于其中心的商群不可能是循环群. 因此, 正规子群 $H$ 是 $R$-群. 由(3)有

$$x^n = y^{-1}x^n y = (y^{-1}xy)^n,$$

又因为 $x$ 和 $y^{-1}xy$ 在 $R$-群 $H$ 中, 故 $x = y^{-1}xy$, 由之得 $xy = yx$. 因此(3)可改写成

$$(xy^{-1})^n = 1,$$

由此注意到 $G$ 是无扭群便有 $x = y$. 定理证完.

因为对于"是 $R$-群"这个群的性质, 局部定理显然成立, 故还可进一步断言, *任意无扭局部幂零群是 $R$-群*.

## §67. 无扭局部幂零群

由上节末所证定理可以得出, 上面对 $R$-群所肯定的所有性质, 特殊言之, 对于任意无扭局部幂零群也都是对的. 但是, 后面这些群还可有许多更深入的研究. 这样的研究还远远没有结束, 而我们在本节中只介绍一些结果, 进一步的研究应当是建立在它们的基础上.

由 §30 我们知道, 无扭阿贝尔群 $G$ 之子群 $A$ 的孤立子, 亦即由子群 $A$ 生成的群 $G$ 中的纯子群, 是由群 $G$ 中所有这样元素组成的, 它们的某个正方幂进入 $A$. 今证, 任意无扭局部幂零群也具有同样性质. 有下面引理(Мальцев[5]; 证明属于 Ю. Г. Федоров).

*设群 $G$ 具有限生成元系,*

$$x_1, x_2, \cdots, x_s, \tag{1}$$

*在 $G$ 中给定一子群 $D$, 使得(1)中任意元素 $x_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 在某*

个正的 $n_i$ 次方后进入 $D$. 此时子群 $D$ 在群 $G$ 中有有限指数且 $G$ 中任意元素的某个正方幂进入 $D$.

对群 $G$ 的类作归纳法来证明这个引理. 设

$$G=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_{k-1}\supset G_k\supset G_{k+1}=E$$

是群 $G$ 的下中心列. 由 §64 中最后一个定理知, 子群 $G_k$ 有有限生成元系. 我们将把引理和下面补充命题合在一起来证.

子群 $G_k$ 有一个有限生成元系, 此系中每一元素的某正方幂进入 $D$.

对于 1 类群, 即阿贝尔群, 所有结论都是显然的. 设它们对 $k$ 类群也已证明了. 这样, 在群 $G/G_k$ 中子群 $DG_k/G_k$ 有有限指数, 因而子群 $DG_k$ 在群 $G$ 中的指数也是有限的. 除此之外, 子群 $G_{k-1}/G_k$ 具有这样的有限生成元系

$$y_1G_k,\quad y_2G_k,\cdots,\quad y_tG_k,$$

使得

$$(y_jG_k)^{m_j}\in DG_k/G_k,\quad m_j>0,\ j=1,2,\cdots,t.\tag{2}$$

这时, 和在证明 §64 中最后定理时一样, 可以证明, 元素 $[x_i, y_j]$, $i=1,2,\cdots,s$, $j=1,2,\cdots,t$, 组成子群 $G_k$ 的生成元系. 由 §14 中换位子的性质(1)—(4)

$$[x_i, y_j]^{n_im_j}=[x_i^{n_i}, y_j^{m_j}]\tag{3}$$

但是元素 $x_i^{n_i}$ 在 $D$ 中, 而由(2), 元素 $y_j^{m_j}$ 和 $D$ 中元素差一个属于群 $G$ 的中心中的因子. 这就证明了, 等式(3)的右侧含在子群 $D$ 中. 随之, 在子群 $G_k$ 中找到了一个有限生成元系, 其中每一元素的某正方幂进入 $D$.

因为子群 $G_k$ 是阿贝尔群, 由以上所说, 即得交 $D\cap G_k$ 在 $G_k$ 中有有限指数. 由于同构关系

$$G/(D\cap G_k)\simeq DG_k/D,$$

子群 $D$ 在 $DG_k$ 中也有有限指数, 又因为 $DG_k$ 在 $G$ 内指数的有限性

已经证明过了，故我们证明了引理的所有结论.

*在无扭局部幂零群 $G$ 中任意子群 $A$ 的孤立子 $I(A)$ 由且仅由群 $G$ 中其某正次方幂属于 $A$ 的元素组成.*

显然，由 $x^n \in A$ 可得 $x \in I(A)$. 其次，设

$$x^n \in A, \qquad y^m \in A.$$

群 $G$ 的子群 $H=\{x, y\}$ 是有两个生成元的幂零群，因而依引理 $H$ 中任意元素，其中也有元素 $xy$，它的某正次幂进入交 $A \cap H$，也就是进入子群 $A$. 由此得，群 $G$ 中其某正次幂属于 $A$ 的所有元素组成一个子群. 显然这个子群是孤立的，因此它与 $I(A)$ 重合.

在 Плоткин[3] 中有此定理的另一个证明.

其次，我们来证下面的定理(Глушков[1]; 还可参看 Плоткин[1], Смирнов[1]).

*在无扭局部幂零群中孤立子群的正规化子是孤立的.*

先考虑无扭幂零群 $G$，它有一个中心列

$$E=Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_k \subset Z_{k+1} \subset \cdots \subset Z_n = G.$$

设 $A$ 是此群的孤立子群，$N$ 是它的正规化子并设元素 $x$ 有性质

$$x^m \in N, \text{但 } x \notin N. \tag{4}$$

子群 $x^{-1}Ax$ 不在 $A$ 内，因为，不然的话，(4)将不会成立，因此在 $A$ 中可找到一个元素 $a$，使得

$$x^{-1}ax \notin A. \tag{5}$$

设

$$a \in Z_{k+1}, \quad a \notin Z_k. \tag{6}$$

同时我们认定把元素 $a$ 选择成使足码 $k$, $1 \leqslant k < n$, 是可能中的，亦即满足条件

$$x^{-1}(A \cap Z_k)x \subseteq A \tag{7}$$

中的最小者. 可以认定，还有

$$x(A \cap Z_k)x^{-1} \subseteq A, \tag{8}$$

不然的话，我们就用元素 $x^{-1}$ 来代替元素 $x$，反正由(4)我们仍有 $x^{-m}\in N$.

令

$$[a, x]=y_1, \quad [y_i, x]=y_{i+1}, \quad i=1, 2, \cdots.$$

由(6)知

$$y_i\in Z_k, \quad i=1, 2, \cdots, \tag{9}$$

并且由中心列的定义还知

$$y_{k+1}=y_{k+2}=\cdots=1. \tag{10}$$

因为

$$x^{-1}ax=ay_1, \tag{11}$$

故由(5)

$$y_1\notin A. \tag{12}$$

我们指出，还有

$$x^{-1}y_ix=y_iy_{i+1}, i=1, 2, \cdots. \tag{13}$$

我们将用带足码的字母 $z$ 表示元素 $y_i$ 的乘积. 由于(9)任何这样的一个乘积都在 $Z_k$ 中；如果它也在 $A$ 中，则依(7)和(8)，在用元素 $x$ 和 $x^{-1}$ 所作的变形下它的象仍在 $A$ 中. 把乘积 $z$ 中所有因子 $y_i$ 的足码都增加 1 便得到一个新的乘积，我们将用 $z'$ 表示它. 其次，令 $z^{(s)}=(z^{(s-1)})'$.

今证，对所有 $i$

$$x^{-i}ax^i=az_i, \tag{14}$$

这里显然有 $z_1=y_1$. 还将证明，对所有 $i$

$$z_i=z_{i-1}y_1z'_{i-1}, \tag{15}$$

事实上，由(11)和(13)

$$x^{-2}ax^2=x^{-1}ay_1x=ay_1y_1y_2,$$

即是 $z_2=z_1yz'_1$. 设(14)和(15)已对足码 $i=2, \cdots, j-1$ 证明了. 当任意 $i$ 时将有

$$x^{-i}ax^{i}=x^{-1}az_{i-1}x=ay_1\cdot x^{-1}z_{i-1}x.$$

由此有 $z_i=y_1x^{-1}z_{i-1}x$. 因此

$$x^{-1}z_{i-1}x=y_1^{-1}z_i. \tag{16}$$

由此依(13)对于 $s=1,2,\cdots$有(对 $i$ 作归纳法去证——译者注)

$$x^{-1}z_{i-1}^{(s)}x=y_{s+1}^{-1}z_i^{(s)}. \tag{17}$$

因此，依(15)，(11)，(13)，(16)和(17)，

$$\begin{aligned}x^{-j}ax^{j}&=x^{-1}az_{j-1}x\\&=x^{-1}ax\cdot x^{-1}z_{j-2}x\cdot x^{-1}y_1x\cdot x^{-1}z'_{j-2}x\\&=ay_1\cdot y_1^{-1}z_{j-1}\cdot y_1y_2\cdot y_2^{-1}z'_{j-1}\\&=az_{j-1}y_1z'_{j-1}.\end{aligned}$$

由此得对足码 $j$ 也有等式(14)和(15). 易见由等式(15) 对 $s=1,2,\cdots$可得等式

$$z_i^{(s)}=z_{i-1}^{(s)}y_{s+1}z_{i-1}^{(s+1)}. \tag{18}$$

由(4)和(14)得

$$z_m\in A, \tag{19}$$

由(15)这也就是

$$z_{m-1}y_1z'_{m-1}\in A.$$

因而由(7)，(16)，(13)和(17)有

$$\begin{aligned}x^{-1}(z_{m-1}y_1z'_{m-1})x&=x^{-1}z_{m-1}x\cdot x^{-1}y_1x\cdot x^{-1}z'_{m-1}x\\&=y_1^{-1}z_my_1z'_m\in A.\end{aligned}$$

因为 $y_1^{-1}=x^{-1}a^{-1}xa$, 故依(7)和(8)有 $z_my_1z'_my_1^{-1}\in A$ 或者由(19)有

$$y_1z'_my_1^{-1}\in A,$$

由此再利用(7)和(8)我们有

$$z'_m\in A.$$

重复上面同样的讨论但只是用元素 $y_2$ 代替元素 $y_1$, 我们将会有

$$z''_m\in A.$$

一般地有

$$z_m^{(i)}\in A,\quad i=1,2,\cdots,k-1, \tag{20}$$

但是乘积 $z_m^{(k-1)}$ 就是元素 $y_k$ 的某正次方幂. 从而由子群 $A$ 的孤立性得元素 $y_k$ 本身在 $A$ 中.

设已证元素 $y_k, y_{k-1}, \cdots, y_{i+1}$ 在 $A$ 中, 因而 $A$ 也含有形如 $z^{(i)}$ 的任意乘积. 依(20)

$$z_m^{(i-1)}\in A,$$

依(18)这就是

$$z_{m-1}^{(i-1)}\,y_i z_{m-1}^{(i)}\in A.$$

左侧中最后一个乘因子在 $A$ 中, 因而

$$z_{m-1}^{(i-1)}y_i\in A,$$

再利用(7)和(8)可得

$$y_i z_{m-1}^{(i-1)}\in A.$$

设已证

$$y_i^t z_{m-t}^{(i-1)}\in A. \tag{21}$$

这时由(18)可得

$$y_i^t z_{m-t-1}^{(i-1)}\,y_i z_{m-t-1}^{(i)}\in A.$$

左侧中最后一个乘因子在 $A$ 中, 再用元素 $y_i^{-1}$ 去变形剩下来的乘积, 我们就得

$$y_i^{t+1}z_{m-t-1}^{(i-1)}\in A.$$

随之对所有的 $t$ 从属关系(21)都是对的. 当 $t=m-1$ 时有

$$y_i^{m-1}z_1^{(i-1)}\in A.$$

但 $z_1^{(i-1)}=y_i$, 因为 $z_1=y_1$. 这样, $y_i^m\in A$, 由此根据 $A$ 的孤立性便得

$$y_i\in A.$$

这就证明了, 群 $A$ 包含所有元素 $y_i$, 其中也有元素 $y_1$, 但这和(12)是矛盾的.

现在我们转到无扭局部幂零群$G$的情况．设$A$是群$G$的孤立子群，$N$是它的正规化子，并设$x^m \in N$而$x \notin N$．和上面一样，在$A$中可找到元素$a$，使得

$$x^{-1}ax \notin A. \tag{22}$$

子群

$$H=\{a, x\}$$

是幂零群，而子群

$$A'=A \cap H$$

在$H$中是孤立子群．设$N'$是子群$A'$在群$H$中的正规化子．由(22)有$x \notin N'$．其次显然

$$x^{-m}A'x^m \subseteq A'.$$

假若在这里出现的是严格包含关系，则我们就会有

$$x^m A' x^{-m} \supset A',$$

即

$$x^m A' x^{-m} \not\subseteq A,$$

然而我们知道$x^{-m} \in H$．这样，便有$x^m \in N'$，但这和上面考察过的幂零群的情况是相矛盾的．

定理证完．由此定理可得(Плоткин[1,3])：

*若在无扭局部幂零群$G$中子群$A$是子群$B$的正规子群，则孤立子$I(A)$也是孤立子$I(B)$的正规子群．*

事实上，显然有$I(A) \subseteq I(B)$．其次因为在群的内自同构对应下子群的孤立子映到此子群之象的孤立子中，故对任意$b \in B$有

$$b^{-1}I(A)b=I(b^{-1}Ab)=I(A),$$

即是整个子群$B$含在子群$I(A)$在群$G$中的正规化子中．上面已证过，此正规化子是孤立子群，因而在其中也包含子群$I(B)$，由此得$I(A)$是$I(B)$的正规子群．

顺便指出，Глушков[4]中研究了带有孤立子群链中断条件

的无扭局部幂零群(参看补充 25.2).

*无扭局部幂零群的完备化.* 完备群在阿贝尔群的理论中之意义是由 § 23 中许多定理确定的. 在这些定理中，我们要指出任意阿贝尔群可以嵌入完备阿贝尔群的定理，包含给定阿贝尔群 $G$ 的极小完备阿贝尔群的存在性定理，以及关于它的唯一性定理，亦即关于在含群 $G$ 的任意两个极小完备阿贝尔群间同构对应（且是群 $G$ 恒等自同构的延续）的存在性定理.

关于可嵌入到完备群的定理很容易推广到任意群上去（参看 B. Neumann[7]).

*任意群 $G$ 包含在某一完备群中.*

事实上，设 $a$ 是群 $G$ 的任意元素而 $k$ 是任意自然数. 其次设 $B=\{b\}$ 是循环群，令它是无限的，若元素 $a$ 的阶是无限的，或是 $nk$ 阶有限的，若元素 $a$ 的阶是 $n$. 这时带相重子群 $\{a\}=\{b^k\}$，并且

$$a=b^k$$

的群 $G$ 和 $B$ 之自由积既含有群 $G$ 也含有方程 $x^k=a$ 的一个解，这里并不排除此方程已在群 $G$ 内就有解的可能性.

设对 $(a, k)$ 的集合是良序的，其中 $a\in G$, $k$ 是自然数，可以应用超限的方法对每一对 $(a, k)$ 依次使用上述的构造而在极限处取已作出之群的并而作出含群 $G$ 的递增群列. 我们延着这条路可得到一个含群 $G$ 的群 $G_1$，使得在其中对 $G$ 中任意元素可开任意次方. 再对群 $G_1$ 应用同样的构造，我们将得群 $G_2$，等等. 群 $G_n$, $n=0, 1, 2, \cdots$，并且 $G_0=G$，组成的递增列之并显然是完备群.

定理证完. 同时我们看到，关于含群 $G$ 的极小完备群是无法谈任何的唯一性的——若是把证明中所示的构造应用到阿贝尔群 $G$，则将把此群嵌入到一个非常不交换的完备群中(参看补充19.4.).

若是从阿贝尔群不是立即转到任意群，而仅是转到幂零群，那末可以不可以仍能保留完备阿贝尔群的所有上面列举的性质呢？

在一般情况这也是不成立的，因为由在 §65 中证明的，关于完备 $ZA$-群的周期部分属于此群之中心的 Черников 定理可以得出，非交换周期幂零群不能嵌入到完备幂零群中. 但在 Мальцев[6] 中指出了，如果我们限制在无扭幂零群或者甚至任意无扭局部幂零群，则情况就完全是另一个样子了.

若 $G$ 是完备无扭局部幂零群，则显然有，群 $G$ 的完备子群且仅有它们是 $G$ 中孤立子群. 由于这一点上面所得结果中的某些个在完备群的情形具有另外一种说法，例如，如果群 $G$ 是无扭完备局部幂零群，则

群 $G$ 的任意完备子群集之交本身也是完备的；

群 $G$ 完备子群的正规化子本身也是完备的；

群 $G$ 的上中心链

$$E \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \cdots \subseteq Z_\alpha \subseteq \cdots$$

的各项都是完备群，此链的所有因子都是无扭完备阿贝尔群，而所有商群 $G/Z_\alpha$ 都是完备无扭局部幂零群.

这最后一个定理的某些结论并不是上节相应定理的直接推论. 事实上，关于商群 $G/Z_\alpha$ 的结果是由它们为群 $G$ 的同态象以及子群 $Z_\alpha$ 的完备性得出的. 在这之后应用已证过的中心之完备性可得因子 $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$ 是完备的结论.

现在设 $G$ 是任意(即不一定是完备的)无扭局部幂零群. 若它含在某个完备的无扭局部幂零群 $\bar{G}$ 中，则群 $G$ 在群 $\bar{G}$ 中的孤立子是群 $\bar{G}$ 的含 $G$ 的一个极小完备子群.

我们将称任意含 $G$ 的极小完备无扭局部幂零群 $G^*$ 为群 $G$ 的完备化. 由于本节中第一个定理，无扭完备局部幂零群 $G^*$ 是其子群 $G$ 的完备化当且仅当 $G^*$ 中任意元素的某正次方幂进入 $G$ 中.

下面的 Мальцев 定理是整个无扭幂零群的理论中的基本

定理.

*任意无扭局部幂零群$G$可以嵌入到无扭完备局部幂零群中,因而具有完备化. 若$G_1^*$和$G_2^*$是群$G$的两个完备化,则在其间存在有延续群$G$恒等自同构的同构对应,并且它是唯一的.*

Мальцев[6]中利用群论和Lie代数的工具证明了这个定理. 直接证明尚未发表,因而我们只好略去其证明(参看补充19.4).

不依赖于Мальцев定理,我们来证明几个关于无扭局部幂零群之完备化的定理,基本上是由Мальцев[6]引出来的.

*若无扭完备局部幂零群$G^*$是其子群$G_1$和$G_2$的完备化,则它也是其交$G_1\cap G_2$的完备化.*

事实上,若$x\in G^*$,则存在有自然数$k_1$和$k_2$,使得$x^{k_1}\in G_1$,$x^{k_2}\in G_2$,因而有

$$x^{k_1k_2}\in(G_1\cap G_2).$$

*若$G^*$是群$G$的完备化而$H^*$是群$G^*$的完备子群,则$H^*$是交$H^*\cap G$的完备化且此交是$G$中孤立子群. 用此方法在群$G$的所有孤立子群与其完备化$G^*$的所有完备子群之间可建立一个一一对应.*

事实上,$H^*$中任意元素的正次幂进入$G$中,亦即属于交$H^*\cap G$,因此$H^*$是此交的完备化. 其次,若$G$中元素$g$的某个正次幂属于$H^*\cap G$,则元素$g$本身必在完备子群$H^*$中,即是在$H^*\cap G$中,因而$H^*\cap G$是$G$的孤立子群. 最后,若$H$是群$G$的孤立子群,$H^*$是它在$G^*$中的完备化,则$H^*\cap G$中任意元素的某正次幂进入$H$中,因而由$H$在$G$中的孤立性得

$$H^*\cap G=H.$$

这就证明了定理的所有结论.

最后,我们来证明一个定理,它是Ю. Г. Федоров告诉作者的. *若$G^*$是无扭局部幂零群$G$的完备化*

$$E\subseteq Z_1\subseteq Z_2\subseteq\cdots\subseteq Z_\alpha\subseteq\cdots$$

是群 $G$ 的上中心链而 $Z_\alpha^*$ 是子群 $Z_\alpha$ 在群 $G^*$ 中的完备化，则

$$E\subseteq Z_1^*\subseteq Z_2^*\subseteq\cdots\subseteq Z_\alpha^*\subseteq\cdots$$

是群 $G^*$ 的上中心链.

事实上，$Z_1^*$ 中元素 $z_1^*$ 的某次方在 $Z_1$ 中，$G^*$ 中元素 $g^*$ 的某次方在 $G$ 中，由这些方幂的交换性和在上节中所指出的一样可得元素 $z_1^*$ 和 $g^*$ 本身也是可换的，因而 $Z_1^*$ 在群 $G^*$ 的中心中. 另一方面，如果 $x$ 是群 $G^*$ 中心的元素，则它的某方幂在 $G$ 中因而也在 $Z_1$ 中，这时 $x$ 就在 $Z_1^*$ 中，这就证明了，$Z_1^*$ 是群 $G^*$ 的中心.

设对小于 $\beta$ 的所有 $\alpha$ 已证子群 $Z_\alpha^*$ 是群 $G^*$ 的上中心链的第 $\alpha$ 项. 设 $\beta-1$ 存在. 因为子群 $Z_{\beta-1}$ 是 $G$ 的孤立子群，故由上面证过的关于在群 $G$ 的孤立子群和群 $G^*$ 的完备子群间对应的相互一意性可得等式

$$Z_{\beta-1}^*\cap G=Z_{\beta-1} \tag{23}$$

是成立的. 商群 $G^*/Z_{\beta-1}^*$ 是其子群 $GZ_{\beta-1}^*/Z_{\beta-1}^*$ 的完备化，而子群 $Z_\beta^*/Z_{\beta-1}^*$ 是子群 $Z_\beta Z_{\beta-1}^*/Z_{\beta-1}^*$ 的完备化. 事实上，若

$$(g^*Z_{\beta-1}^*)^k=z_\beta Z_{\beta-1}^*,\quad g^*\in G^*,\quad z_\beta\in Z_\beta,$$

则

$$g^{*k}\in z_\beta Z_{\beta-1}^*\subset Z_\beta^*,$$

而因为子群 $Z_\beta^*$ 是完备的，故 $g^*$ 也在 $Z_\beta^*$ 中. 另一方面，子群 $Z_\beta Z_{\beta-1}^*/Z_{\beta-1}^*$ 是群 $GZ_{\beta-1}^*/Z_{\beta-1}^*$ 的中心，这是因为，若群 $G$ 的元素 $g_0$，使得对此群任意元素 $g$ 都有

$$[g_0Z_{\beta-1}^*, gZ_{\beta-1}^*]=Z_{\beta-1}^*,$$

则依(23)有

$$[g_0, g]\in(Z_{\beta-1}^*\cap G)=Z_{\beta-1},$$

因而 $g_0$ 含于 $Z_\beta$ 中. 现在我们所处的情况完全和定理证明开始时相同，因而可以同样地证明，子群 $Z_\beta^*/Z_{\beta-1}^*$ 是 $G^*/Z_{\beta-1}^*$ 的中心. 由

之便得，$Z_\beta^*$ 是群 $G^*$ 的上中心链的第 $\beta$ 项.

若 $\beta$ 是极限数，则 $Z_\beta$ 是所有 $Z_\alpha$ 的并. $Z_\beta^*$ 的任意元素 $x$ 的某次方进入 $Z_\beta$ 因而在某个 $Z_\alpha, \alpha<\beta$ 中，但此时元素 $x$ 就在 $Z_\alpha^*$ 中. 这样，$Z_\beta^*$ 就是子群 $Z_\alpha^*, \alpha<\beta$，的并，因而是群 $G^*$ 上中心链的第 $\beta$ 项.

由上证定理得，*无扭 $ZA$-群的完备化仍是 $ZA$-群，而 $k$ 类无扭幂零群的完备化仍是同一类的幂零群.*

在结束时我们指出 Глушков[4]证明的一个定理，它推广了阿贝尔群之完备子群的一个熟知性质：*在无扭局部幂零群中由完备子群的任意集合生成的子群仍是完备的.*

# 第一版的结束语[1]

群的概念是为数不多的一些基本概念之一，对于它们的全面研究组成现代数学的目的和内容. 现在，把群论仅局限于与相邻学科的直接需求有关的一些问题，已是不可能的了——群论中任何本质的推进，任何揭示群概念的深刻和新的性质的结果都不会不给这些相邻学科的发展以影响，因而可被看作是在整个数学中的一个推进. 实际上，在数学的非常不相同的部门中以及甚至在其范围以外，例如在理论物理中，群为自己找到各式各样而有时是非常本质的应用，并且它的作用随时都在增长. 当然，在很多情况中暂时只涉及群的概念本身以及它最简单的性质，即是对群的理论没有提出任何要求. 但是，毫无疑问，数学的相应分枝将会得到对其发展的新的可能性，若是它们对它们所使用的群的群论性质以及这些性质与该分枝中最基本概念的性质之连系表现出巨大兴趣的话，这里的基本概念是指，对它们的研究组成这些分枝的基本课题. 另一方面，利用深入的群论结果或者对群论提出巨大要求的情形也是非常多的. 下面指出其中的一些.

Galois 理论的基本内容归结为，任意多项式（更精确些，给定交换域的任意有限扩张）可与一个完全确定的有限群对应着. 对这个对应的研究引导出可能把交换域理论和多项式理论的许多问题归结为有限群论的问题；特别，用这种途径解决了用根号解方程的可解性问题. 其次，在环，特别是交换环论中，而今带算子的群以及包括 Jordan-Hölder 定理在内的关于这些群的基本结果找到了巨大的应用. 具有限生成元的阿贝尔群的理论在线性代数

1）在此结束语的叙述中保留了对第一版章节的引证，但在括号中注明本版的相应章节编号.

中，在代数数论中以及特别在拓扑（Betti 群）中起着重要的作用。另一方面，组合拓扑中的许多问题归结为关于由定义关系式给定的群的问题。

群论的最终目的——假如一般而言对于巨大的广泛分叉的学科可以谈论统一最终目的的话——应该认为是*寻求对所有存在于自然界的群或者至少是充分广泛的群类给以完全的描述*，即能用一组不变量来给出这些群。关于具有有限生成元的阿贝尔群的理论可以认为是一个样本。对这个情形所得到的刻划（参看§22(20)）是非常方便和清晰的，使得现在很难指出一个与此有关的问题，在解决它时会遇到什么困难。但是容易明白，不可能指望对于更广泛的其他群类也能得到同样清晰的刻划，例如，对可数准素阿贝尔群的不变量系（§37(28)）以及特别是对无扭有限秩阿贝尔群的不变量系（§§40 和 41(32*b* 和 32*c*)）已是非常复杂的，它们反映上述这些群类的丰富性，并且没能给出这样的可能性，使得可以设想，在解决有关这些群的任意问题时除去纯技术性外已不会遇到其他困难了。此外，一般很难期待，在所有的情况都能用不变量来确定群，而这些不变量是利用较群本身更单纯或是更习惯的一些概念，但是仅仅这样的分类才是有兴趣的。只需指出，到目前为止甚至对有限群尚未得到完善的刻划，而有限群集才仅是可数的。即使是在附加的假设下，只考察有限可解群或者甚至有限 $p$-群，也还是没有能作到这一点。在为列举有限群寻找途径的各种不同工作中应当指出 Fitting 的论文[6]，其中作了这样的尝试，想把对任意有限群的描写归结为对可解群和单群的刻划。另一方面，已经很久前便开始了刻划所有具给定 $n$ 阶群的工作，从一些小的 $n$ 开始。但是，这些研究随着 $n$ 的增大的程度变得非常复杂且暂时讨论过的值 $n$ 只限在二百或三百范围内，并总结不出任何一般的规律性。从 Hölder[1]开始的一个方向是依赖数 $n$ 分解成素因子

乘积的形式来刻划 $n$ 阶群，并从这种分解最简单的情况开始. 这一方向也是除了一些个别新的群的例子外没有给出任何东西来.

联系着群的编目这个一般问题现在可以理解，为什么在现代群论中直积和自由积占据这样重要的作用. 显然，它们的作用在于，在很多情况下它们能把结构较复杂的群的研究归结为相对来说较简单因而较易进行刻划的群的研究.

直积和自由积运算是代数运算（在 §1 的意义下），并且是交换的和结合的，定义在所有群的集合上（或者，为了避免集论的悖论，在所有其势不超过某个基数 $\mathfrak{M}$ 的群的集合上）. 这些运算中的每一个把群对 $A, B$ 一意地对应到一个确定群 $C$ 上，并且在 $C$ 中可找到子群 $A'$ 和 $B'$，它们合在一起生成 $C$ 以及顺序地同构于 $A$ 和 $B$. 目前尚未解决的问题是，在群的集合上是否存在具有所有刚列举过的性质的运算，它既不是直积也不是自由积？如果回答是肯定的，则便提出这样的任务：找出所有这样的运算，按直积和自由积的理论的样板建立它们的理论而以后利用它们去研究这些或那些群类[参看 §§62 和补充 11.1]. 这里指出，在文献中常常出现的直积的一些推广并不满足上面讨论的问题，这些推广的特点在于不假定其中一个因子是正规子群——在这种情况下，一般说，这个积不是由其给定的因子完全确定.

直积理论的发展现在建筑在某些非常困难的问题上. 很自然地在群论的这一部分中基本的问题是一个群的两个直分解的同构问题，或者更准确些，是关于此两分解是否有中心同构的接续的问题（参看 §27(42)）. 对于具任意算子集的群在这个方向摆着的任务是把 Remak-Шмидт 定理推广到较具主列群更广的群类上去. 现在还难指出一个合适的群类. 也许可以取具有递降正规链中断条件的群作为这样的群类——对于 Dedekind 格且具递降链有中断条件者类似于 Remak-Шмидт 定理的定理是不成立的；但是截

至目前为止任何对具任意算子集的群证过的定理都能移置到格的理论中[参看 §§ 47 和补充 5].

对于没有算子的群也摆着同样的任务，并且作为出发点可以取 Kořinek 定理(参看 § 27(42))，[1]这个定理，以及关于具不可分解中心的群的定理(§27(47$a$)的结尾处)使得可以提出下面一般问题：关于给定群的直分解中心同构的定理的正确性是否可由对于此群之中心的相应定理推得，因之是否这样能把整个问题归结为阿贝尔群的情形？作为这个方向上的第一步可以考察这样的群，其中心可分解为可数个有限循环群和$p^{\infty}$-型群的直积. 实际上，据 § 29(53)，具极小条件的阿贝尔群具有上述类型的分解，并且只有有限个因子，即是用这种方法我们事实上把 Kořinek 定理所讨论的群类推广了. 与此同时由 § 37(28)我们知道，在可数周期阿贝尔群中，可分解成有限循环群和$p^{\infty}$-型群直积的阿贝尔群是使任意直分解都有同构接续定理成立的仅有者(参看补充 § 5).

关于直积的子群问题也是非常有兴趣的. 与自由积的情形不同尚未能借助直因子的子群来刻划直积的子群结构，更不用说找出充要条件使得某个群能同构于给定群的直积的子群. 甚至对于有限群这个问题都是很困难的，这一点可以从与此有关的论文 Kořinek[3, 4, 5]和Shoda[5, 6]中看出.

与自由积理论的发展相联系的，出现了具相重子群的自由积的概念. 设考察一些群 $A_\alpha$ 的集合，这些群 $A_\alpha$ 是由生成元系 $\mathfrak{M}_\alpha$ 和定义关系式系 $\Phi_\alpha$ 给出(其中 $\alpha$ 遍历某一足码集). 在每一群 $A_\alpha$ 中取定一个子群 $B_\alpha$，并且认定，这些子群的选择能够这样作出，使得所有它们彼此间是同构的，即是都同构于某一群 $B$； 用 $f_\alpha$ 表示 $B_\alpha$ 和 $B$ 间的一个确定同构对应. 群 $A_\alpha$ 的具相重子群 $B$ 的自由积

1) 在 Kořinek[1]中实际上讨论具算子的群，但是在定理的证明中本质地利用了中心的任意子群而不是象算子群论所要求的只使用容许子群.

指的是一个群 $G$, 它以所有集 $\mathfrak{M}_\alpha$ 的并集为生成元系，其定义关系式系取为所有系 $\Phi_\alpha$ 之并再添加上如下得到的关系式：从不同的子群 $B_\alpha$ 和 $B_\beta$ 中取出在同构对应下对应群 $B$ 的同一元素的元素对而令其相等所得到的关系式. 推广 §43(33)中相应的构造方法，利用它可以证明(参看 Schreier[4])，群 $G$ 与这些群 $A_\alpha$ 的生成元与定义关系式选择无关，并且它包含一些子群与它们同构而仅相交在这些相重子群上.

具相重子群的自由积又给出一种构造新群的方法，因此和通常一样应讨论一个群的两个表成具相重子群的自由积之分解间的同构问题，这里例如可假设，这些分解已经不能再进一步进行了. 主要的困难在于，一般说，这两个分解的相重子群不一定相等，因而关于此问题目前为止只得到非常特殊的一些结果（参看，例如 Schreier[1]，Курош[2]，Калашников 和 Курош[1]）. 目前最一般的结果是 З. М. Кишкина 作出的，即对于有共同的相重子群的两个分解，如果这个相重子群还是群的正规子群的话，则关于同构的定理是成立的(参看 §35 和补充§8).

现在我们转来讨论一些个别的群类，并从阿贝尔群论开始. 阿贝尔群组成一个研究得较好的群类，然而对于它们仍然可指出一系列重要和困难的问题. 根据 Ulm 定理，可数准素阿贝尔群的理论可认为是已完成了，因此应转到建立任意势的准素群的理论. 这里目前已得到的结果很少，只好从建立一些条件下手，使得在这些条件下具给定 Ulm 因子的群是存在的，以此来推广对于可数情形在 §36(27)中证明的存在定理. 这个问题的解决会引起较大的兴趣，因为它可能肯定地解决下面这个目前尚未解决的问题：所有不同构的具给定势 $\mathfrak{M}$ 的阿贝尔群的集合是否具有势 $2^{\mathfrak{m}}$？其次，在 Ulm 定理的证明中(§37(28))本质地利用了 Prüfer 定理，这就是说，此证明不能推广到可数群范围以外去，然而Ulm定理的陈叙对

于任意势的群都是有意义的. 是否 Ulm 定理对于不可数准素群仍然成立? 如果关于这个非常困难的问题的回答是肯定的——应当指出,即使当所有 Ulm 因子可分解成循环群的直和这个特殊情况目前也没有得到解答——则整个准素群的理论就归结为去刻划没有无限高元素的任意势准素阿贝尔群 这种刻划本身就是很有兴趣的,但是得到这个刻划是一个不很简单的课题,这是因为在 § 35 (26)中已指出过存在有这种类型的群,它们不能展开成循环群的直和,并且最近 Куликов[1]证明了,甚至对任意非极限势存在有具有这个势的准素群,它们不包含无限高的元素且不能分解成具较小势的群的直和[1](参看 § 26 和补充 § 30).

无扭阿贝尔群的理论中作为近期的任务应当是利用在第九(八)章中得到的关于有限秩群的刻划去对有限秩群作更深入的研究,特别是研究这些群的子群,它们的直分解以及它们的自同构群等等(参看第八章和补充 § 31). 至于混合阿贝尔群,则在这里,一方面,应当在寻求条件以保证阿贝尔群能分解成周期群和无扭群的直和这个问题中,去掉 Baer[13]在研究此问题所加上去的限制,而另一方面,既使对可数情形也好,对具有给定最大周期子群 $A$ 以及给定的关于它的商群 $B$ 的所有阿贝尔群进行充分好的刻划. 为了得到这样的刻划可以利用扩张理论的方法(§ 28 (第十二章)),但最终结果应当是利用群 $A$ 和群 $B$ 的不变量来陈述. 同时应追求这样一个目标,即是关于群可分解成周期群和无扭群的直和的 Baer 条件该能由这个结果作为显然推论而得出(参看 § 29, 补充 § 32 和补充 § 33).

下面我们将讨论某些群类,它们在这种或那种意义下是最接近有限群的一些推广. 首先指出,在有限群论感兴趣的诸问题中

1) 在本书交印之后,Л. Я. Куликов 得到一系列与本段所列举的问题有关的重要结果(第一版校样时注).

可以列出这样一些来，它们被认为是群论的这个分枝中的独特问题，而把它们移置到无限群上，虽然有时也是可能的，但却总是处于理论发展的基本途径之外：我们谈的是与给定群的元素或子群的个数相联系的问题．作为这类结果的例子我们指出下面这个Frobenius定理，它在有限群论中起着非常显著的作用．

*如果 $k$ 是有限群 $G$ 的阶的因数，则此群中满足方程 $x^k=1$ 的元素(亦即其阶为 $k$ 之因数的元素)之个数被 $k$ 整除．*

这个定理被不止一次地推广过，其中也有对无限群的情形；这些推广中的最好结果属于 F. Hall[3]．

周期群组成一个场所，有限群论中研究的大多数问题可以用自然的方式移置到这里来．毫无疑问，周期群的理论将生长成为群论中最丰富最宽广的部分之一；但目前在这里已作出的结果太少，不足以能有充分信心地指出进一步研究的道路．周期群论所遇到的基本困难在于我们不止一次提到的 Burnside 问题：*任意周期群是否为局部有限的*，或者换言之，*任意具有限生成元的周期群是否为有限群？*这个问题甚至在群的所有元素之阶有界的条件下（如果谈论上述陈述中的第二种）也没有解决(参看补充 §16)．显然当群中异于1的元素的阶都等于2的情形是有肯定解答的，因为这样的群是阿贝尔群．对于元素的阶都等于3的情形，以及对于具两个生成元的群，其元素之阶等于4或4的因数的情形，Burnside[2]曾给与肯定的解答；在 Levi 和 Van der Waerden[1] 中也考察了上述两种情形中的第一个．之后，B. Neumann[3]解决了群的元素的阶不大于3的情形，而最后 Санов[1]解决了具任意有限生成元的群，其元素的阶不大于4的情形．但是对于具有两个生成元的群，其中异于1的元素之阶等于5的情形，此问题仍没有解决．另一方面，下面问题也没有解决：*对子群有升链条件和降链条件的任意群是否为有限群？*这个问题是 Burnside 问题的特殊情

况，因为降链条件(极小条件)保证此群是周期的，而升链条件保证此群有有限生成元.

在第七(十三)章中我们有机会看到，在研究周期或者局部有限群时极小条件有时是非常有益的. 目前下一问题没有解决：*是否任意有极小条件的群是可数的？*与此有关的有下面的 Шмидт 问题：*是否存在异于 $p^\infty$-型群的群，其所有子群都是有限的？*如果利用在 § 29(53)中对于有极小条件阿贝尔群的刻划，则容易说明，这些问题的解决可由下面 Черников 问题的肯定解决而推出：*是否任意有极小条件的群必有有限指数的阿贝尔正规子群？*

周期群理论中首要问题之一是*细致地研究无限 $p$-群*. 例如我们可指出，目前没有确定，*无限(局部有限)$p$-群是否可为单群*[1]？对于局部有限情形这个问题还是 Черников 提出的下述问题的一个特殊情形：*局部可解群是否能和其换位子群相重合？*毫无疑问，局部可解群也需要进一步的研究(参看 § 58 和补充 § 23). 例如，*在 § 32(60)末提到的 Hall 关于有限可解群的 Sylow Π-子群的结果非常可能推广到局部可解群上.* 从周期群理论的其他路子中该指出应研究具有限共轭元素类的周期群或局部有限群，以及仅具有有限个共轭元素类的群(参看补充 § 17).

应当主要在周期群理论范围之外去发展*可解群的理论*. 不能认为可解群定义本身对于无限群情形是已最后确立的了，这里近期任务是研究*可解群定义的各种不同可能方案之间的关系*. 在周期群理论之外也有关于 Sylow 子群的某些问题. 例如*在什么条件下给定群的 Sylow $p$-子群共轭或者同构的问题*就是这样的问题，这些条件应较这种子群的个数有限性为广. [参看 §§54, 55 和补充 18]. 另一方面，虽然(可数)局部有限群的 Sylow $p$-子群不

---

1) 在本书付印之后，С. Н. Черников 得到这个问题的否定解决(第一版校样时注).

一定是同构的，但是给定群之 Sylow $p$-子群的多样性在这种情形应当具有某些相当明确的规律性(参看，例如，可数对称群)，而确立这些规律性该是群论的这一部分的近期任务之一．最后，研究局部有限群，对其 Sylow 子群附加以这样或那样的限制，也能导出内容丰富的理论．

具有有限生成元的群是非常有兴趣的．在阿贝尔群的情况对它们的研究没有遇到困难，但是关于具有有限生成元的非交换群的任意问题，甚至从其陈述上看最初等的问题，通常都是很困难的．这里除 Burnside 问题外例如可指出我们已知道的 Hopf 问题：具有有限生成元的群能和其真商群同构吗？(参看 Magnus [6])(参看 §38和补充 §15)或者关于是否存在具有有限生成元的无限单群问题．对于仅具有有限生成元及有限个关系式的群的研究没有导致建立一个宽广的理论，虽然这样群的个数仅是可数的，或者所考虑的是关于具有有限生成元的群，而其任意子群仍是具有有限生成元的，这也不导致建立一宽广的理论，依 §29(53)这样的群，也就是对子群有极大条件的群，并且目前甚至关于此最后一群类的势的问题也没有解决．

我们知道，在秩 2 自由群的子群中可以找到任意有限甚至可数秩的自由群(参看 §45(35))．另一方面，任意一个有限群含在某个对称群中，而依 §12(6)它有由两个元素组成的生成元系．这就产生一个问题：任意一个可数群能否嵌入到某个具有有限生成元的群，甚至可能是具两个生成元的群．(参见 §38)．如果不是这样，则应该对容许有这种嵌入的那些可数群作专门的研究．与此问题相近的有下面这个关于泛可数群的 Мальцев 问题：是否存在一个可数群，而任意可数群同构于它的一个子群．顺便指出，对于可数阿贝尔群言，可数个与有理数加群同构的群以及对每个素数 $p$ 取可数个 $p^{\infty}$-型群所作的直和就是这样的泛群（参看 §38 和

补充 § 1).

许多关于具有有限生成元的群的问题，其中也包括上面列举过的一些，是可以表述成关于有限秩自由群正规子群的问题. 例如，对元素的阶在总体上有界的情形关于周期群的 Burnside 问题就变成一个自由群中所有元素的 $n$ 次幂生成的子群是否为有限指数的问题；关于是否有具有有限生成元的无限单群的问题对应于在有限秩自由群中是否有无限指数的极大正规子群的问题；在 § 8(61) 中提到的关于奇合成数阶有限单群的 Burnside 问题等价于在自由群中是否存在极大正规子群，其指数是奇合成数；最后，在有限秩自由群中是否存在正规子群，它在群的某个自同构下映到自身的真子群上，这个问题接近于 Hopf 问题(虽然和它并不一样). 但是，这种到自由群上的转移并未使对这些或与之相似问题的解决变得容易一些. 问题最终总是归结为要弄清，由自由群的某些元素生成的正规子群是由一些什么样的元素组成的. 这就是已在 § 14(41)结尾处指出过的*恒等式问题*(参看 § 38 和补充 § 15).

关于由定义关系式给出的群的同构问题目前只能说出一些分散的、特殊的结果，距形成一个理论是很远的. 下面这个 Magnus 定理(参看 Magnus[9])无疑是很有兴趣的，它涉及某个群和自由群的同构问题.

*如果一个具有 $n+k$ 个生成元，而由 $k$ 个表成这些生成元的定义关系式给出的群具有某一由 $n$ 个元素组成的生成系，则它必是 $n$ 秩自由群.*

在一系列工作中(例如参看 Coxeter[2,3,5,6], Sinkov[2, 3])研究某些特殊类型的定义关系式，并且主要讨论由它们定义的群的有限性问题. 研究得比较好一些的只是*具一个定义关系式的群*. 然而目前例如下面问题也还没有解答：*两个具有一个定义关系式的群什么时候是同构的？* 没有完全解决的还有关于这些群的子群

问题；这里基本的结果是 Dehn-Magnus 定理(关于自由的定理, Magnus[1])：

如果群 $G$ 由生成元 $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ 以及一个关系式 $f(a_1, \cdots, a_n)=1$ 给出，如果元素 $a_n$ 出现在此关系式中且不能利用变形去掉它，则子群 $\{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ 是自由群，而元素 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 是它的自由生成元.

最后，关于由关系式给出的群的结果中，我们指出一个属于 Reidemeister[1]的方法，用它可建立由定义关系式给出的群之子群的定义关系式.

在局部自由群的理论中(参看 § 48(37$a$)) 还留下许多未解决的问题，在它们未获得解决前，不能说对这个相当广泛群类的研究已经完成了. 例如，上面已经提到的关于是否存在非可数的局部自由群，它不是由自由群组成的升链之并，以及与此相近的关于是否存在有限秩的非可数局部自由群. 这最后一个问题可归结为下面的问题：是否可将任一可数有限秩局部自由群嵌入较大的同一秩的局部自由群中？还可提出关于完全的刻划有限秩可数局部自由群的问题，对此很可能利用我们已知的关于有限秩无扭阿贝尔群的刻划. 另一方面，局部自由群的定义本身引出如下的问题：一个不可数群，如果其任意可数子群都是自由的，则它本身是否是自由的？

除去上面考察过的群类以外，置换群和矩阵群在群论中占有显著的地位. 与我们到此以前所作过的不一样，对这些群的研究依赖于它们的元素的性质因而这些研究(除去收在 § 11(11$a$)中有关置换群的基本性质外) 不在本书计划中. 置换群的理论对于有限群的情况很久以来就有详细的讨论，它也已扩展到无限群的情况，然而，目前尚无特别大的成就. 对矩阵群的研究，确切地说，对域上有限阶非退化矩阵的群之子群的研究，是一个非常重要的课

题. 任一有限群可以同构地嵌入特征零的域上某一充分高阶矩阵群——为了证明它可以用 Cayley 定理(§5(5)),而把置换代以在每行每列处只含一个异于零而等于1的矩阵. 在上世纪末和本世纪初有大量研究(参看 Dickson[1], Van der Waerden[1])是讨论全矩阵群以及其最重要的子群和商群,亦即所谓*线性群*,特别是在有限域上的情形. 无限群已远不是常能同构嵌入矩阵群内,或者象通常所说的,用矩阵同构地表示,因而很基本的是关于在什么条件下这种表示是可能的问题. 在 Мальцев[2] 中对阿贝尔及周期群的情形给出了这样的条件;特别,$p$-群可用特征零的域上矩阵同构表示的必要且充分条件是它为特殊的[1]. 但是对于*有限生成群*目前还没有得到类似的条件,同时还知道,既存在有限生成的矩阵群,它不能由有限定义关系式系给出(Нисневич[1]),也存在具有有限生成元和有限关系式组的群,它不能用矩阵同构表示(Фукс-Рабинович[3]). 由于对矩阵群上述有关有限生成群的许多问题得到解决,其中有关于周期群的 Burnside 问题(Burnside[3] 和 Schur[1]是对特征零的域,而 Мальцев[2] 是对特征 $p$ 的域), Hopf 问题以及关于具有限生成元的无限单群问题(两者都在 Мальцев[2]), 使该问题更有趣. 最后,我们指出 Нисневич[1]证明的一个定理: 可由矩阵同构表示的群之自由积在适当选择的域上本身也具有这样的表示.

在有限群论中群到矩阵群中的同态映射起着很重要的作用,如果谈论的是到域$K$上$n$阶全矩阵群中的同态映射,这就是所谓*域$K$上$n$次表示*. 关于这些表示的性质以及在研究有限群时,它们的作用等问题,我们建议读者去看 Van der Wearden 的《近世代数学》的第17章或者关于有限群的专著.

现在剩下来的是对群与格的联系作几点注记. 在§52(47$b$)

1) 即是 Черников $p$-群.

中已提出了由其子群格唯一确定该群的可能性问题并指明了在一般情况回答是否定的．因此很自然地除了子群格以外还考虑与此群相联系的其他格，例如关于所有子群的所有陪集作成的格．另一方面，继续 Baer 的工作，应该弄清，是否和阿贝尔群的情况类似，任一在某种意义下充分《大》的非交换群由其子群格完全确定？最近 Л. Е. Садовский 证明，自由群的确具有这样的性质(参看补充 § 14)．

# 名 词 索 引

## 三 画



## 四 画



## 五 画

## 六　画

## 七 画

## 八 画

## 十 画



## 十 一 画

## 十二画



## 十三画

## 十 四 画



## 十 五 画

# 参考文献[1]


Абиян (Abian A.)

[1] On the lengths of bases of a finitely generated abelian group, Boll. Unione mat. ital. **19** (1964), 12—15. [65:5, 166] (Д. 28.2)

Абиян и Райнхарт (Abian A., Rinehart D.)

[1] Honest subgroups of abelian groups, Rend. Circolo Mat. Palermo **12** (1963), 353—356. [66:4, 127] (Д. 35.4)

Абхьянкар (Abhyankar Sh.)

[1] On the finite factor groups of abelian groups of finite rational rank, Amer. J. Math. **79** (1957), 190—192. [57:11, 8449] (Д. 31.1)

Адельсбергер (Adelsberger H.)

[1] Über unendliche diskrete Gruppen, J. reine angew. Math. **163** (1930), 103—124.

Адо И. Д.

[1] О нильпотентных алгебрах и $p$-группах, ДАН СССР **40** (1943), 339—342. (58, Д. 3.2)

[2] О подгруппах счетной симметрической группы, ДАН СССР **50** (1945), 15—18.

[3] Локально конечные $p$-группы с условием минимальности для нормальных делителей, ДАН СССР **54** (1946), 475—478. (53)

[4] Доказательство счетности локально конечной $p$-группы с условием минимальности для нормальных делителей, ДАН СССР **58** (1947), 523—524.

Адян С. И.


1) 文中的方括号表示所说论文在文献杂志«Математика»中的出处，例如[64:9, 341]表示 1964 年，9A期，文献 341．圆括号表示在其中提到该论文的某本书的节码．Д 表示本书的最后一篇«补充»，(Д. 28.2)即(补充 28.2)。

[1] Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп, Тр. Моск. матем. о-ва **6** (1957), 231—298. [58:10, 8524] (Д. 15.4)

Альтман (Altman M.)

[1] Généralisation aux groupes abéliens de la théorie de F. Riesz, C. R. Paris **246** (1958), 1135—1138. [60:8, 8609] (Д. 34.1)

Амицур (Amitsur S. A.)

[1] A general theory of radicals, Amer. J. Math. **74** (1952), 774—786; **76** (1954), 100—136. [55:11, 5654] (Д. 20.1)

Армстронг (Armstrong J. W.)

[1] A note on endomorphism group, Publ. Math. **10** (1963), 116—119. [65:8, 171] (Д. 34.2)

[2] On the indecomposability of torsion-free abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 323—325. [66:10, 134] (Д. 31.2)

Артин (Artin E.)

[1] The free product of groups, Amer. J. Math. **69** (1947), 1—4.

Асано (Asano K.)

[1] Bemerkungen über die Erweiterungstheorie von Gruppen, J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ. **A5** (1954), 75—80. [57:1, 139] (Д. 12.1)

Атия (Atiyah M.)

[1] On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 307—317. [59:3, 2425] (Д. 5.3)

Ауслендер и Линдон (Auslander M., Lyndon R. C.)

[1] Commutator subgroups of free groups, Amer. J. Math. **77** (1955), 929—931. [56:11, 7893] (Д. 9.2)

Бальцержик (Balcerzyk S.)

[1] Remark on a paper of S. Gacsályi, Publ. Math. **4** (1956),

357—358. [60:4, 3808] (Д. 29.2)

[2] On algebraically compact groups of I. Kaplansky, Fund. Math. **44** (1957), 91—93. [59:9, 8851] (Д. 29.5)

[3] On factor groups of some subgroups of a complete direct sum of infinite cyclic groups, Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 141—142. [61:6, 204] (Д. 29.5, Д. 31.6)

[4] On classes of abelian groups, Bull. Acad. Polon. **9** (1961), 327—329. [62:11, 138] (Д. 21.2)

[5] On groups of functions defined on Boolean algebras, Fund. Math. **50** (1962), 347—367. [63:11, 161] (Д. 29.5)

[6] On classes of abelian groups, Fund. Math. **51** (1962), 149—178; **56** (1964), 199—202. [64:11, 174; 66:1, 212] (Д. 21.2)

Бальцержик, Бялыницкий-Бируля и Лось (Balcerzyk S., Bialynicki-Birula A., Los J.)

[1] On direct decompositions of complete direct sums of groups of rank 1, Bull. Acad. Polon. **9** (1961), 451—454. [62:3, 177] (Д. 31.5)

Баранович Т. М.

[1] О политождествах в универсальных алгебрах, Сиб. матем. ж. **5** (1964), 976—986. [65:7, 244] (Д. 11.6)

Барнес и Уолл (Barnes D. W., Wall G. E.)

[1] On normaliser preserving lattice isomorphisms between nilpotent groups, J. Austral. Math. Soc. **4** (1964), 454—469. [66:7, 193] (Д. 14.4)

Баумслаг (Baumslag G.)

[1] A theorem on infinite groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **53** (1957), 545—548. [58:5, 3557] (Д. 3.3)

[2] Finite factors in infinite ascending derived series, Math. Z. **68** (1958), 465—478. [58:10, 8591] (Д. 23.5)

[3] Wreath products and $p$-groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **55** (1959), 224—231. [60:6, 6203] (Д. 12. 4, Д. 19. 2,

Д. 19.5)

[4] On a problem of Lyndon, J. London Math. Soc. **35** (1960), 30—32. [61:1, 207] (Д. 9.1)

[5] Roots and wreath products, Proc. Cambr. Phil. Soc. **56** (1960), 109—117. [62:2, 201] (Д. 12.4)

[6] Some aspects of groups with unique roots, Acta Math. **104** (1960), 217—303. [61:10, 196] (Д. 19.1)

[7] Wreath products and finitely presented groups, Math. Z. **75** (1961), 22—28. [61:10, 194] (Д. 12.4)

[8] A remark on hyperabelian groups, Arch. Math. **12** (1961), 321—323. [62:8, 145] (Д. 23.5)

[9] A generalisation of a theorem of Malcev, Arch. Math. **12** (1961), 405—408. [63:1, 194] (Д. 19.4)

[10] Some remarks on nilpotent groups with roots, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 262—267. [61:11, 205] (Д. 19.2)

[11] On generalised free products, Math. Z. **78** (1962), 423—438. [63:8, 157] (Д. 8.1)

[12] A non-Hopfian group, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 196—198. [63:5, 163] (Д. 15.1)

[13] A remark on generalised free products, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 53—54. [62:10, 151] (Д. 15.2)

[14] Automorphism groups of residually finite groups, J. London Math. Soc. **38** (1963), 117—118. [64:8, 154] (Д. 17.9)

[15] On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 193—209. [64:8, 173] (Д. 17.9)

[16] Some subgroup theorems for free $\mathfrak{B}$-groups, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 516—525. [64:5, 181] (Д. 10.6, Д. 24.5)

[17] On the residual nilpotence of some varietal products,

Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 357—365. [64:5, 182] (Д. 11.4, Д. 19.4, Д. 25.5)

[18] Wreath products and extensions, Math. Z. **81** (1963), 286—299. [63:11, 181] (Д. 10.5)

[19] Groups with one defining relator, J. Austral. Math. Soc. **4** (1964), 385—392. [65:12, 231] (Д. 15.2)

[20] On a problem of Plotkin concerning locally nilpotent groups, Math. Z. **83** (1964), 25—26. [64:6, 172] (Д. 25. 2)

[21] On free $D$-groups, Comm. pure and appl. math. **18** (1965), 25—30. [65:12, 225] (Д. 19.3)

Баумслаг и Блекберн (Baumslag G., Blackburn N.)

[1] Direct summands of unrestricted direct sums of abelian groups, Arch. Math. **10** (1959), 403—408. [61:7, 224] (Д. 6.1)

[2] Groups with cyclic upper central factors, Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 531—544. [61:6, 212] (Д. 3.3)

Баумслаг и Б., Х. и П. Нейманы (Baumslag G., B., H. and P. Neumanns)

[1] On varieties generated by a finitely generated group, Math. Z. **86** (1964), 93—122. [65:12, 237] (Д. 10.5)

Баумслаг и Солитэр (Baumslag G., Solitar D.)

[1] Some two-generator one-relator non-Hopfian groups, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 199—201. [63:5, 203] (Д. 15.1)

Баумслаг и Стейнберг (Baumslag G., Steinberg A.)

[1] Residual nilpotence and relations in free groups, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 283—284. [64:10, 176] (Д. 9.1)

Баур (Baur H.)

[1] Ein Kommutativitätskriterium für unendliche anflösbare Gruppen, Arch. Math. **11** (1960), 176—182. [61:12, 273]

(Д. 23.1)

Бауэр (Bauer M.)

[1] Über die alternierende Gruppe, Mat. fiz. Lap. **39** (1932), 25—26. (9)

Бауэрс (Bowers J. F.)

[1] On compositions series of polycyclic groups, J. London Math. Soc. **35** (1960), 433—444. [61:8, 190] (Д. 24.3)

Бахмут и Левин Я. (Bachmuth S., Lewin J.)

[1] The Jacobi identity in groups, Math. Z. **83** (1964), 170—176. [64:9, 164] (Д. 24.4)

Бачурин Г. Ф.

[1] О группах с возрастающим центральным рядом, Матем. сб. **45** (1958), 105—112. [59:6, 5575] (Д. 25.4)

[2] Об одном классе нильпотентных групп, сб. научн. тр. Магнитогорск. горно-металлург. ин-та **16** (1958), 99—112. [59:6, 5573] (Д. 27.1)

[3] О смешанных $ZA$-группах с конечным центром, Матем. сб. **52** (1960), 879—890. [61:7, 219] (Д. 25.4)

[4] Один критерий конечности ранга нильпотентной группы без кручения, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1963, № 6, 25—28. [64:7, 216] (Д. 25.2)

[5] Об однослойных $p$-группах, обладающих возрастающим центральным рядом, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1965, № 5, 27—30. [66:2, 229] (Д. 25.4)

Беккер И. Х.

[1] О центроиде абелевой группы с конечным числом образующих, Тр. Томск. ун-та **155** (1961), 190—193. [62:11, 137] (Д. 34.3)

[2] О голоморфах абелевых групп, Сиб. матем. ж. **5** (1964), 1228—1238; **7** (1966), 231. [65:10, 173] (Д. 3.2)

Бенадо (Benado M.)

[1] Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von

Herrn O. N. Golowin, I, Math. Nachr. **14** (1955), 213—234. [59:3, 2370] (Д. 11.3)

[2] Sur la théorie générale des produits réguliers, C. R. Paris **243** (1956), 1092—1093. [60:5, 4953] (Д. 11.5)

[3] Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin, II, Math. Nachr. **16** (1957), 137—194. [60:5, 4952] (Д. 11.3)

[4] Sur la théorie générale des produits réguliers, C. R. Paris **244** (1957), 1595—1597, 1702—1704. [60:5, 4954, 4978](Д. 11. 3)

[5] Sur la théorie générale des produits réguliers de Monsieur O. N. Golowine, V, Publ. Univ. Alger **A4** (1957), 111—143. [61:9, 217] (Д. 11.3)

[6] Remarques sur un théoréme de Monsieur Oleg N. Golovine, Чехосл. матем. ж. **9** (1959), 475—484. [61:9, 219] (Д. 11.3)

[7] Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golowin, III, Math. Nachr. **21** (1960), 1—36. [61:9, 216] (Д. 11.3)

[8] Über den Kommutatrixbegriff, Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 514—530. [61:9, 227] (Д. 11.3)

Берлинков М. Л.

[1] Группы, обладающие компактной структурой подгрупп, ДАН СССР **82** (1952), 505—508.

[2] Группы, обладающие компактной структурой подгрупп, Матем. сб. **34** (1954), 473—498. [55:9, 4265] (Д. 14.2)

[3] О структуре подгрупп слойно-конечной группы, УМН **12**, № 4 (1957), 267—271. [58:6, 4507] (Д. 14.2)

[4] Обобщенная сходимость и обобщенная компактность в б-структурах, Матем. сб. **53** (1961), 233—260. [62:3, 256] (Д. 14.2)

[5] Обобщенная компактность в структуре подгрупп периодиче-

ской абелевой группы, **I**, Матем. зап. Уральск. ун-та **4**, № 1 (1963), 5—17. [64:6, 170] (Д. 14.2)

Берман С. Д. и Любимов В. В.

[1] Группы, допускающие любую перестановку факторов композиционного ряда, УМН **12**, № 5 (1957), 181—183. [58:10, 8585] (Д. 2.5)

Бернсайд (Burnside W.)

[1] The theory of groups of finite order, Cambridge, 1897; 2-е изд., 1911.

[2] On an unsettled question in the theory of discontinuous groups, Quart. J. **33** (1902), 230—238. (38, Заключение к 1-му изд., Д. 16.2)

[3] On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions, Proc. London Math. Soc. **3** (1905), 435—440. (Заключение к 1-му изд.)

Биркгоф (Birkhoff G.)

[1] On the combination of subalgebras, Proc. Cambridge Phil. Soc. **29** (1933), 441—464.

[2] Transfinite subgroup series, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 847—856. (56)

[3] Subgroups of Abelian groups, Proc. London Math. Soc. **38** (1934), 385—401. (20)

[4] Lattices and their applications, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 793—800.

[5] Lattice theory, New York, 1940. Rev. ed., 1948. (Русский перевод; Теория структур, ИЛ, 1952.) (43)

[6] The radical of a group with operators, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 751—753.

Биркгоф и Холл Ф. (Birkhoff G. and Hall Ph.)

[1] On the order of groups of automorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), 496—499. (12)

Блекберн (Blackburn N.)

[1] Nilpotent groups in which the derived group has two generators, J. London Math. Soc. **35** (1960), 33—35. [61:3, 188] (Д. 27.1)

[2] Some remarks on Černikov $p$-groups, III. J. Math. **6** (1962), 421—433. [63:5, 194] (Д. 25.4)

[3] Conjugacy in nilpotent groups, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 143—148. [65:12, 220] (Д. 27.2)

Бойер (Boyer D. L.)

[1] Enumeration theorems in infinite abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 565—570. [58:1, 135] (Д. 34.4)

[2] A note on a problem of Fuchs, Pacif. J. Math. **10** (1960), 1147. [61:?, 240] (Д. 29.2)

Бойер и Уокер Е. (Boyer D. L., Walker E. A.)

[1] Almost locally pure abelian groups, Pacif. J. Math. **9** (1959), 409—413. [61:6, 225] (Д. 29.2)

Боньяр (Bognár M.)

[1] Ein einfaches Beispiel direkt unzerlegbarer abelscher Gruppen, Publ. Math. **4** (1956), 509—511. [60:2, 1377] (Д. 31.2)

Боревич З. И. и Фаддеев Д. К.

[1] Теория гомологий в группах, Вестн. ЛГУ, 1956, № 7, 3—39; 1959, № 7, 72—87. [57:4, 2921; 61:6, 234] (Д. 12.1)

Брайент (Bryant S.)

[1] Isomorphism order for abelian groups, Pacif. J. Math. **8** (1958), 679—683. [61:1, 212] (Д. 35.4)

Брак (Bruck R. H.)

[1] On the restricted Burnside problem, Arch. Math. **13** (1962), 179—186. [63:9, 161] (Д. 16.4)

Браконье (Braconnier J.)

[1] Sous-modules d'un module complètement décomposable, Ann. Univ. Lyon **14** (1951), 29—33. (Д. 28.2)

Брамере (Brameret M.-P.)

[1] Sous-groupes complètement invariants d'un groupe abélien, C. R. Paris 255 (1962), 1369—1370. [63:11, 152] (Д. 35.4)

[2] Sur les groupes $p$-réduits, C. R. Paris. **256** (1963), 345—346. [64:2, 251] (Д. 31.7)

Браун (Brown A. B.)

[1] Group invariants and torsion coefficients, Ann. of Math. **33** (1932), 373—376.

Бриттон (Britton J. L.)

[1] Solution of the word problem for certain types of groups, Proc. Glasgow Math. Assoc. **3** (1956), 45—54, 68—90. [60:1, 151, 152] (Д. 15.4)

[2] The word problem for groups, Proc. London Math. Soc. **8** (1958), 493—506. [60:12, 13589] (Д. 15.4)

[3] The word problem, Ann. Math. **77** (1963), 16—32. [64: 10, 175] (Д. 15.4)

Брумберг Н. Р.

[1] Связь сплетений групп с другими операциями над группами, Сиб. матем. ж. **4** (1963), 1221—1234. [64:6, 179] (Д. 12.4)

Бун (Boone W. W.)

[1] The word problem, Ann. Math. **70** (1959), 207—265. [60:10, 11183] (Д. 15.4)

Бундгард и Нильсен (Bundgaard S. and Nielsen J.)

[1] On normal subgroups with finite index in $F$-groups, Mat. Tidsskrift, B (1951), 56—58.

Бусаркин В. М.

[1] Вполне расщепляемые группы с перестановочным базисом расщепления, Матем. зап. Уральск. ун-та **4**, № 1 (1963), 18—21. [63:10, 149] (Д. 19.7)

Бусаркин В. М. и Старостин А. И.

[1] О расщепляемых локально конечных группах, Матем. сб. **62** (1963), 275—294. [64:6, 163] (Д. 19.7)

Бьюмонт (Beaumont R. A.)

[1] Projections of non-abelian groups upon abelian groups containing elements of infinite order, Amer. J. Math. **64** (1942), 115—136. (Д. 14.4)

[2] Projections of the prime-power abelian group of order $p^m$ and type $(m-1, 1)$. Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 866—870.

[3] Groups with isomorphic proper subgroups, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 381—387.

Бьюмонт и Пирс (Beaumont R. A., Pierce R. S.)

[1] Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules, Trans. Amer. Math. Soc. **91** (1959), 209—219. [60:12, 13639] (Д. 30.2)

[2] Torsion-free rings, III. J. Math. **5** (1961), 61—98. [63: 3, 180] (Д. 31.7, Д. 35.3)

[3] Torsion free groups of rank two, Mem. Amer. Math. Soc., Providence, 1961. [63:8, 146] (Д. 31.1)

[4] Quasi-isomorphism of $p$-groups, Proc. Colloq. on abelian groups, 1963, Budapest, 1964, 13—27. [66:1, 216] (Д. 35.3)

[5] Isomorphic direct summands of abelian groups, Math. Ann. **153** (1964), 21—37. [65:5, 169] (Д. 29.1)

[6] Some invariants of $p$-groups, Mich. Math. J. **11** (1964), 137—149. [66:3, 170] (Д. 30.2)

[7] Quasi-isomorphism of direct sums of cyclic groups, Acta Math. Hung. **16** (1965), 33—36. [65:12, 219] (Д. 35.3)

Бэр (Baer R.)

[1] Zur Einführung des Scharbegriffs, J. reine angew. Math. **160** (1929), 199—207.

[2] Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe,

S.-B. Heidelberg. Akad. **2** (1933), 12—17. (476, Д. 14. 3)

[3] Der Kern, eine charakteristische Untergruppe, Comp. Math. **1** (1934), 254—283. (Д. 3. 3)

[4] Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen, Math. Z. **38** (1934), 375—416. (48, 51)

[5] The decomposition of enumerable, primary, abelian groups into direct summands, Quart. J. (Oxford) **6** (1935), 217—221. (28)

[6] The decomposition of abelian groups into direct summands, Quart. J. (Oxford) **6** (1935), 222—232.

[7] Types of elements and characteristic subgroups of abelian groups, Proc. London Math. Soc. **39** (1935), 481—514.

[8] Gruppen mit hamiltonschem Kern, Comp. Math. **2** (1935), 241—246. (Д. 3. 3)

[9] Zentrum und Kern von Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung, Comp. Math. **2** (1935), 247—249. (Д. 3. 3)

[10] Automorphismen von Erweiterungsgruppen, Actualités scient. et industr., № 205, Paris, 1935.

[11] Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich, Studia Math. **5** (1934), 15—17.

[12] Gruppen mit vom Zentrum wesentlich verschiedenem Kern und abelscher Faktorgruppe nach dem Kern, Comp. Math. **4** (1936), 1—77. (Д. 3. 3)

[13] The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, Ann. Math. **37** (1936), 766—781. (29, Заключение к 1-му изд., Д. 29. 1, Д. 32. 1)

[14] Primary abelian groups and their automorphisms, Amer. J. Math. **59** (1937), 99—117. (21)

[15] Abelian groups without elements of finite order, Duke math. J. **3** (1937), 68—122. (31, 32)

[16] Dualism in abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), 121—124.

[17] Groups with abelian central quotient group, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 357—386.

[18] Groups with preassigned central and central quotient group, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 387—412.

[19] The applicability of lattice theory to group theory, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 817—820.

[20] The significance of the system of subgroups for the structure of the group, Amer. J. Math. **61** (1939), 1—44. (47б, Д. 14.4)

[21] Duality and commutativity of groups, Duke math. J. **5** (1939), 824—838. (Д. 14.5)

[22] Almost hamiltonian groups, Comp. Math. **6** (1939), 382—406.

[23] Groups with abelian norm quotient group, Amer. J. Math. **61** (1939), 700—708. (Д. 3.3)

[24] Nilpotent groups and their generalization, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 393—434. (54, 59, 62—64)

[25] Sylow theorems for infinite groups, Duke math. J. **6** (1940), 598—614. (54, 55, 60, Д. 18.1, Д. 18.3)

[26] Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 800—806. (23, Д. 28.4)

[27] Automorphism rings of primary abelian operator groups, Ann. of Math. **44** (1943), 192—227. (21, Д. 34.1)

[28] A theory of crossed characters, Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 103—170. (49)

[29] The higher commutator subgroups of a group, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 143—160. (Д. 16.4)

[30] Groups without proper isomorphic quotient groups, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 267—278. (64)

[31] Crossed isomorphisms, Amer. J. Math. **66** (1944), 341—404. (49)

[32] Representations of groups as quotient groups, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 295—419. (37, 52, 64, Д. 15.2, Д. 17.7)

[33] Absolute retracts in group theory, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 501—506.

[34] The double chain condition in cyclic operator groups, Amer. J. Math. **69** (1947), 37—45.

[35] Splitting endomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 508—516.

[36] Endomorphisms rings of operator loops, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 517—529.

[37] Direct decompositions, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 62—98. (42, Д. 5.4)

[38] The role of the center in the theory of direct decompositions, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 167—174. (42, Д. 5.4)

[39] Direct decompositions into infinitely many summands, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 519—551. (42, Д. 5.4)

[40] Finiteness properties of groups, Duke math. J. **15** (1948), 1021—1032. (53, Д. 17.6)

[41] Groups with descending chain condition for normal subgroups, Duke math. J. **16** (1949), 1—22. (53, Д. 17.3)

[42] Extension types of abelian groups, Amer. J. Math. **71** (1949), 461—490.

[43] Die Schar der Gruppenerweiterungen. Math. Nachr. **2** (1949), 317—327.

[44] Free sums of groups and their generalizations, Amer. J. Math. **71** (1949), 706—742; **72** (1950), 625—646, 647—670. (Д. 8.2)

[45] Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen, Math. Ann. **124** (1952), 161—177. (Д. 17.7, Д. 22.5)

[46] Klassifikation der Gruppenerweiterungen, J. reine und angew. Math. **187** (1949), 75—94. (Д. 12.2)

[47] Ein Einbettungssatz für Gruppenerweiterungen, Arch. Math. **2** (1950), 178—185. (Д. 12.1)

[48] Factorization on $n$-soluble and $n$-nilpotent groups, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 15—26. [53:2, 598] (Д. 18. 2)

[49] The hypercenter of a group, Acta Math. **89** (1953), 165—208. [54:3, 2524] (Д. 25.4)

[50] Das Hyperzentrum einer Gruppe, II, Arch. Math. **4** (1953), 86—96. [54:3, 2525] (Д. 25.4)

[51] Das Hyperzentrum einer Gruppe, III, Math. Z. **59** (1953), 299—338. [55:4, 1668] (Д. 25.4)

[52] Das Hyperzentrum einer Gruppe, IV, Arch. Math. **5** (1954), 56—59. [55:9, 4261] (Д. 22.1, Д. 25.4)

[53] Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung, Math. Ann. **129** (1955), 139—173. [56:2, 1076] (Д. 24.1)

[54] Supersoluble groups, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 16—32. [56:4, 2807] (Д. 23.4)

[55] Finite extensions of abelian groups with minimum condition, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 521—540. [56:6, 4350] (Д. 3.1, Д. 17.2, Д. 17.3, Д. 18.1)

[56] Nilgruppen, Math. Z. **62** (1955), 402—437. [56:9, 6413] (Д. 20.4, Д. 26.4, Д. 26.5)

[57] Burnsidesche Eigenschaften, Arch. Math. **6** (1955), 165—169. [56:9, 6414] (Д. 21.3)

[58] Noethersche Gruppen, Math. Z. **66** (1956), 269—288. [57:5, 3803] (Д. 15.2, Д. 17.5)

[59] Norm and hypernorm, Publ. Math. **4** (1956), 347—350. [59:4, 3544] (Д. 3.3)

[60] Lokal Noethersche Gruppen, Math. Z. **66** (1957), 341—363. [58:2, 1023] (Д. 17.5, Д. 23.1)

[61] Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen, Math. Ann. **133** (1957), 256—270. [58:2, 1024] (Д. 26.3, Д. 26.4)

[62] Classes of finite groups and their properties, Ill. J. Math. **1** (1957), 115—187. [60:1, 147] (Д. 21.1)

[63] Die Torsionsuntergruppe einer abelschen Gruppe, Math. Ann. **135** (1958), 219—234. (Русский перевод — «Математика» **4**, № 4 (1960), 3—19.) [59:5, 5181] (Д. 32.1, Д. 33.1)

[64] Die Potenzen einer gruppentheoretischen Eigenschaft, Abh. Math. Sem. Hamburg **22** (1958), 276—294. [59:11, 10849] (Д. 21.3)

[65] Überauflösbare Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg **23** (1959), 11—28. [60:10, 11329] (Д. 23.4, Д. 34.3)

[66] Kriterien für die Endlichkeit von Gruppen, Jahresber. Dtsch. Math. -Ver. **63** (1960), 53—77. [61:5, 224] (Д. 17.1)

[67] Abzählbar erkennbare gruppentheoretische Eigenschaften, Math. Z. **79** (1962), 344—363. [63:3, 169] (Д. 21.3)

[68] Gruppentheoretische Eigenschaften, Math. Ann. **149** (1963), 181—210. [63:12, 157] (Д. 21.3)

[69] Gruppen mit Minimalbedingung, Mat. Ann. **150** (1963), 1—44. [63:11, 137] (Д. 17.2, Д. 18.1)

[70] Groups with minimum condition, Acta arithm. **9** (1964), 117—132. [65:3, 182] (Д. 17.3, Д. 21.3)

[71] Der reduzierte Rang einer Gruppe, J. reine und angew. Math. **214—215** (1964), 146—173. [65:3, 169] (Д. 21.3)

[72] Erreichbare und engelsche Gruppenelemente, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **27** (1964), 44—74. [65:3, 193] (Д. 20.1, Д. 23.4, Д. 26.5, Д. 26.6)

[73] The hypercenter of functorially defined subgroups, Ill.

J. Math. 8 (1964), 177—230. [65:4, 141] (Д. 21.4)

[74] Irreducible groups of automorphisms of abelian groups, Pacif. J. Math. **14** (1964), 385—406. [65:7, 169] (Д. 34.3)

[75] Endlich definierbare gruppentheoretische Funktionen, Math. Z. **87** (1965), 163—213. [65:10, 160] (Д. 21.4)

[76] Group theoretical properties and functions, Coll. Math. **14** (1966), 285—328. (Д. 21.4)

Бэр и Леви (Baer R. und Levi F.)

[1] Vollständige irreduzibele Systeme von Gruppenaxiomen, S. -B. Heidelber;. Akad. **2** (1932), 3—12 (Beitr. zur Algebra, 18). (3a)

[2] Freie Produkte und ihre Untergruppen, Comp. Math., **3** (1936), 391—398. (34, 35, Д. 7.1)

Бэр и Уильямс (Baer R. and Williams Ch.)

[1] Splitting criteria and extension types, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 729—743.

Бючи и Райт (Büchi J. R., Wright J. B.)

[1] Invariants of the anti-automorphisms of a group, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 1134—1140. [59:6, 5576] (Д. 3.5)

Вагнер (Wagner A.)

[1] On the associative law of groups, Rend. mat. e applic. Roma **21** (1962), 60—76. [63:8, 182] (Д. 1.1)

Валуцэ И. И.

[1] Левые идеалы полугруппы эндоморфизмов свободной универсальной алгебры, Матем. сб. **62** (1963), 371—384. [64:7, 297] (Д. 9.4)

Ванг (Wang J. S. P.)

[1] On completely decomposable groups, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 184—186. [65:2, 269] (Д. 31.4)

Ван-дер-Варден (Van der Waerden B. L.)

[1] Gruppen von linearen Tranformationen, Berlin, 1935. (Заключение к 1-му изд.)

[2] Free products of groups, Amer. J. Math. **70** (1948), 527—528.

Ван-Кампен (van Kampen E. R.)

[1] On some lemmas in the theory of groups, Amer. J. Math. **55** (1933), 268—273.

Вейхзель (Weichsel P. M.)

[1] On critical $p$-groups, Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 83—100. [65:1, 182] (Д. 10.5)

Вефер (Wever F.)

[1] Über Regeln in Gruppen, Math. Ann. **122** (1950), 334—339.

Виланд (Wielandt H.)

[1] Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, Math. Z. **45** (1939), 209—244. (Д. 2.6)

[2] Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von $p$-Gruppen, Math. Z. **41** (1936), 281—282. (62)

[3] $p$-Sylowgruppen und $p$-Faktorgruppen, J. reine angew. Math. **182** (1940), 180—183.

[4] Zum Satz von Sylow, Math. Z. **60** (1954), 407—408. [55:9, 4249] (Д. 18.2)

[5] Vertauschbare nachinvariante Untergruppen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **21** (1957), 55—62. [58:3, 1850] (Д. 2.6)

[6] Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen, Math. Z. **69** (1958), 463—465. [60:2, 1386] (Д. 2.6)

[7] Zum Satz von Sylow, II, Math. Z. **71** (1959), 461—462. [60:9, 10019] (Д. 18.2)

Виленкин Н. Я.

[1] Прямые разложения топологических групп, I, Матем. сб. **19** (1946), 85—154. (17)

Вильоен (Viljoen G.)

[1] A contribution to the extensions of abelian groups, Ann. Univ. Budapest 6 (1963), 125—132. [64:11, 175] (Д. 33. 3)

Виляцер В. Г.

[1] К теории локально нильпотентных групп, УМН 13, № 2 (1958), 163—168. [59:3, 2366] (Д. 25.1, Д. 26.2)

[2] О некоторых свойствах групп автоморфизмов, Уч. зап. Уральск. ун-та 23, № 2 (1959) 3—10. [60:12, 13600] (Д. 22.3, Д. 22.5)

[3] Стабильные группы автоморфизмов, ДАН СССР 131 (1960), 728—730. [60:12, 13576] (Д. 22.3)

[4] Некоторые примеры групп автоморфизмов, ДАН СССР 139 (1961), 1283—1286. [62:4, 185] (Д. 22.5)

[5] К теории радикалов в группах автоморфизмов, Матем. зап. Уралъск. ун-та 4, № 3 (1963), 79—88. [64:12, 175] (Д. 22.5)

Винберг Э. Б.

[1] К теореме о бесконечномерности ассоциативной алгебры, Изв. АН СССР, сер. матем., 29 (1965), 209—214. [65:7, 191] (Д. 16.1)

Виноградов А. А.

[1] Квазимногообразия абелевых групп, Алгебра и логика (семинар) 4, № 6 (1965), 15—19. (Д. 10.6)

Витт (Witt E.)

[1] Treue Darstellung Liescher Ringe, J. reine angew. Math. 177 (1937), 152—160. (36)

Вольф (Wolf P.)

[1] Das Homomorphieproblem von Gruppenerweiterungen, Math. Nachr. 19 (1958), 190—202. [61:1, 225] (Д. 12.1)

Вуссинг (Wussing H.)

[1] Über Einbettungen endlicher Gruppen, Ber. Sächsisch.

Acad., Math.-natur. Kl. 103 (1958), 5—38. [59:10, 9792] (Д. 1.3)

Гашюц (Gaschütz W.)

[1] Zu einem von B. H. und H. Neumann gestellten Problem, Math. Nachr. 14 (1955), 249—252. [58:10, 8588] (Д. 15.1)

Гёльдер (Hölder O.)

[1] Die Gruppen der Ordnungen $p^3$, $pq^2$, $pqr$, $p^4$, Math. Ann. 43 (1893), 301—412. (Заключение к 1-му изд.)

[2] Bildung zusammengesetzter Gruppen, Math. Ann. 46 (1895), 321—422. (13)

Георг (Georg E.)

[1] Über den Satz von Jordan-Hölder-Schreier, J. reine angew. Math. 180 (1939), 110—120.

Гечег Ф.

[1] Шрейерово расширение мультиоператорных групп, Acta sci. math. 23 (1962), 58—63. [63:3, 255] (Д. 12.1)

Гика (Ghika A.)

[1] Multimi intregi, convexe, strinse si absorbante in grupurile cu radicali, Comun. Acad. RPR 5 (1955), 1229—1233. [56:10, 7155] (Д. 19.3)

Гилберт (Gilbert J. D.)

[1] A note on a theorem of Fuchs, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 433—435. [62:7, 167] (Д. 6.2)

Гирш (Hirsch K. A.)

[1] On infinite soluble groups, I, Proc. London Math. Soc. 44 (1938), 53—60. (59)

[2] On infinite soluble groups, II, Proc. London Math. Soc. 44 (1938)) 336—344. (59)

[3] On skew-groups, Proc. London Math. Soc. 45 (1939), 357—368.

[4] On infinite soluble groups, III, Proc. London Math.

Soc. **49** (1946), 184—194. (59, Д. 17.9, Д. 24.3, Д. 27.4)

[5] Eine kennzeichnende Eigenschaft nilpotenter Gruppen, Math. Nachr. **4** (1951), 47—49. (64)

[6] On infinite soluble groups, IV, J. London Math. Soc. **27** (1952), 81—85. (Д. 17.9, Д. 24.3)

[7] On infinite soluble groups, V, J. London Math. Soc. **29** (1954), 250—251. [55:5, 2116] (Д. 27.5)

[8] Über lokal-nilpotente Gruppen, Math. Z. **63** (1955), 290—294. [56:7, 5119] (Д. 20.6, Д. 25.3)

[9] Assoziative Operationen an Gruppen, Sitzungsber. Berliner Math. Gesellsch., 1957—1958, 12—19. [61:9, 225] (Д. 11.1)

Гладкий А. В.

[1] О простых словах Дикка, Сиб. матем. ж. **2** (1961), 36—45. [62:1, 215] (Д. 15.4)

[2] О группах с $k$-сократимым базисом, Сиб. матем. ж. **2** (1961), 366—383. [62:2, 197] (Д. 15.4)

Глауберман (Glauberman G.)

[1] Fixed points in groups with operator groups, Math. Z. **84** (1964), 120—125. [65:1, 186] (Д. 22.4)

Гливенко В. И.

[1] Théorie générale des structures, Actualités scient. et industr. **652**, Paris, 1938.

Глушков В. М.

[1] О нормализаторах полных подгрупп в полной группе, ДАН СССР **71** (1950), 421—424. (67)

[2] К теории $ZA$-групп, ДАН СССР **74** (1950), 885—888.

[3] О локально нильпотентных группах без кручения, ДАН СССР **80** (1951), 157—160.

[4] О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп без кручения, Матем. сб. **30** (1952),

79—104. (53, 67, Д. 25.2)

[5] О центральных рядах бесконечных групп, Матем. сб. **31** (1952), 491—496. (Д. 25.4, Д. 25.6)

Голди (Goldie A. W.)

[1] On direct decompositions, Proc. Cambridge Phil. Soc. **48** (1952), 1—22, 23—34. (Д. 5.3)

Голема и Хуляницкий (Golema K., Hulanicki A.)

[1] The structure of the factor group of the unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups, II, Fund. Math. **53** (1964), 177—185. [65:5, 170] (Д. 29.5)

Головин О. Н.

[1] Множители без центров в прямых разложениях групп, Матем. сб. **6** (1939), 423—426. (42, 47, 47а, Д. 5.3, Д. 5.5)

[2] Об ассоциативных операциях на множестве групп, ДАН СССР **58** (1947), 1257—1260. (62, Д. 11.1, Д. 11.3)

[3] Нильпотентные произведения групп, Матем. сб. **27** (1950), 427—454. (14, 62, Д. 11.1, Д. 11.3)

[4] Метабелевы произведения групп, Матем. сб. **28** (1951), 431—444. (62, Д. 11.1, Д. 11.5)

[5] К вопросу об изоморфизме нильпотентных разложений группы, Матем. сб. **28** (1951), 445—452. (62, Д. 11.1, Д. 11.5)

[6] Политождественные соотношения в группах, ДАН СССР **145** (1962), 967—970. [63:3, 190] (Д. 11.6, Д. 11.7)

[7] Политождественные соотношения в группах и определяемые ими операции на классе всех групп, Тр. Моск. матем. о-ва **12** (1963), 413—435. [63:11, 176] (Д. 11.6)

[8] Функторные операции на классе всех групп, ДАН СССР **149** (1963), 12—15. [63:11, 175] (Д. 11.2)

[9] Структура поливербальных операций, ДАН СССР **153** (1963), 1238—1241. [64:5, 184] (Д. 11.6)

Головин О. Н. и Гольдина Н. П.

[1] Подгруппы свободных метабелевых групп, Матем. сб. **37** (1955), 323—336. [56:5, 3676] (Д. 27.3)

Головин О. Н. и Садовский Л. Е.

[1] О группах автоморфизмов свободных произведений, Матем. сб. **4** (1938), 505—514. (35)

Голод Е. С.

[1] О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых $p$-группах, Изв. АН СССР сер. матем., **28** (1964), 273—276. [64:9, 220] (Д. 16.1, Д. 18.4, Д. 25.1, Д. 26.2)

Голод Е. С. и Шафаревич И. Р.

[1] О башне полей классов, Изв. АН СССР, сер. матем., **28** (1964), 261—272. [65:2, 336] (Д. 16.1)

Гольберг П. А.

[1] Бесконечные полупростые группы, Матем. сб. **17** (1945), 131—142. (61)

[2] Силовские П-подгруппы локально нормальных групп, Матем. сб. **19** (1946), 451—460. (55, 60)

[3] Силовские базы П-отделимых групп, ДАН СССР **64** (1949), 615—618. (60)

[4] Силовские базы бесконечных групп, Матем. сб. **32** (1953), 465—476. [53:1, 88] (Д. 18.3)

[5] Об одном признаке сопряженности силовских П-баз произвольной группы, Матем. сб. **36** (1955), 335—340. [56:7, 5114] (Д. 18.3)

[6] К теореме Виландта, УМН **14**, № 1 (1959), 153—156. [60:5, 4947] (Д. 18.2)

[7] $VF$-подгруппы бесконечных групп, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1959, № 4, 50—55. [60:8, 8611] (Д. 21.2)

[8] $S$-радикал и силовские базы бесконечных групп, Матем. сб. **50** (1960), 25—42. [60:12, 13590] (Д. 18.3, Д. 20.6)

[9] Холловские базы некотохрых классов групп, Сиб. матем. ж. **1** (1960), 14—44. [61:4, 175] (Д. 18.3)

[10] Холловские Θ-базы конечных групп, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1961, № 1, 36—43. [61:8, 188] (Д. 18.3)

Гольдина Н. П.

[1] Подгруппы метабелевых произведений циклических групп порядка *p*, Изв. вузов, Математика, 1960, № 3, 118—126. [61:9, 221] (Д. 11.5)

Гольфанд Ю. А.

[1] Об изоморфизме между расширениями групп, ДАН СССР **60** (1948), 1123—1125. (48)

[2] Метаспециальные группы, Матем. сб. **27** (1950), 229—248.

[3] О группе автоморфизмов голоморфа группы, Матем. сб. **27** (1950), 333—350. (13)

Гопкинс (Hopkins Ch.)

[1] Non-abelian groups whose groups of isomorphisms are abelian, Ann. Math. **29** (1928), 508—520.

[2] An extension of a theorem of Remak, Ann. Math. **40** (1939), 636—638.

Горчаков Ю. М.

[1] Примитивно факторизуемые группы, ДАН СССР **131** (1960), 1246—1248. [61:5, 211] (Д. 13.4)

[2] Примитивно факторизуемые группы, Уч. зап. Пермск. ун-та **17** (1960), 15—31. [62:4, 177] (Д. 13.4)

[3] О примарно факторизуемых группах, Укр. матем. ж. **14** (1962), 3—9. [63:1, 178] (Д. 13.4)

[4] Примитивно π-факторизуемые группы, ДАН СССР **146** (1962), 14—16. [63:7, 146] (Д. 13.4)

[5] О локально нормальных группах, ДАН СССР **147** (1962), 537—539. [63:7, 147] (Д. 16.7)

[6] О существовании абелевых подгрупп бесконечного ранга в

локально разрешимых группах, ДАН СССР **156** (1964), 17—20. [64:9, 160] (Д. 23.2, Д. 25.1)

[7] О бесконечных группах Фробениуса, Алгебра и логика (семинар) **4**, № 1 (1965), 15—29. [65:10, 176] (Д. 19.7)

[8] О локально нормальных группах, Матем. сб. **67** (1965), 244—254. [66:2, 222] (Д. 16.7)

Горчинский Ю. Н.

[1] Группы с конечным числом классов сопряженных элементов, Матем. сб. **31** (1952), 167—182. (Д. 17.8)

[2] Периодические группы с конечным числом классов сопряженных элементов, Матем. сб. **31** (1952), 209—216. (Д. 17.8)

Гохин (Goheen H.)

[1] Proof of a theorem of Hall, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 143—144. (60)

Гочаи (Gacsályi S.)

[1] On algebraically closed abelian groups, Publ. Math. **2** (1952), 292—296. [55:4, 1658] (Д. 28.4)

[2] On pure subgroups and direct summands of abelian groups, Publ. Math. **4** (1955), 89—92. [56:12, 8606] (Д. 29.2)

Граев М. И.

[1] К теории полных прямых произведений групп, Матем. сб. **17** (1945), 85—104. (17, Д. 6.1)

[2] Прямые суммы циклов в дедекиндовых структурах, Матем. сб. **19** (1946), 439—450.

[3] Изоморфизмы прямых разложений в дедекиндовых структурах, Изв. АН СССР, сер. матем., **11** (1947), 33—46. (42, Д. 5.5)

Грецер и Шмидт Е. (Grätzer G., Schmidt E. T.)

[1] On a problem of L. Fuchs concerning universal subgroups and universal homomorphic images of abelian

groups, Proc. Nederl. Akad. **A64** (1961), 253—255. [62: 4, 169] (Д. 35.1)

[2] A note on a special type of fully invariant subgroups of abelian groups, Ann. Univ. Budapest **3—4** (1960—1961), 85—87. [63:7, 149] (Д. 29.1)

Грин (Green J. A.)

[1] On groups with odd prime-power exponent, J. London Math. Soc. **27** (1952), 476—485. (Д. 16.3)

[2] On the number of automorphisms of a finite group, Proc. Roy. Soc. **A237** (1956), 574—581. [57:8, 6161] (Д. 3.1)

Гриндлингер М. Д.

[1] Dehn's algorithm for the word problem, Comm. pure and appl. Math. **13** (1960), 67—83. [62:6, 165] (Д. 15.4)

[2] On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems, with applications, Comm. pure and appl. Math. **13** (1960), 641—677. [62:6, 166] (Д. 15.4)

[3] An analogue of a theorem of Magnus, Arch. Math. **12** (1961), 94—96. [62:6, 167] (Д. 15.4)

[4] A class of groups all of whose elements have trivial centralizers, Math. Z. **78** (1962), 91—96. [64:1, 233] (Д. 15.4)

[5] Решение проблемы изоморфизма одного класса групп, Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та **31** (1963), 59—61. [64:6, 177] (Д. 15.4)

[6] К магнусовой обобщенной проблеме тождества слов, Сиб. матем. ж. **5** (1964), 955—957. [65:1, 60] (Д. 15.4)

[7] Усиление двух теорем для одного класса групп, Сиб. матем. ж. **6** (1965), 972—984. [66:2, 232] (Д. 15.4)

[8] К проблемам тождества слов и сопряженности, Изв. АН СССР, сер. матем., **29** (1965), 245—268. [65:12, 228] (Д. 15.4)

Гриффитс (Griffiths H. B.)

[1] A note on commutators in free products, Proc. Cambr. Phil. Soc. **50** (1954), 178—188; **51** (1955), 245—251. [56: 5, 3678; 57:1, 141] (Д. 7.4)

[2] Infinite products of semi-groups and local connectivity, Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 455—480. [57:4, 2928] (Д. 7.4)

Грушко И. А.

[1] Решение проблемы тождества в группах с несколькими соотношениями специального вида, Матем. сб. **3** (1938), 543—551. (Д. 15.4)

[2] О базисах свободного произведения групп, Матем. сб. **8** (1940), 169—182. (39, 40)

Грюн (Grün O.)

[1] Beiträge zur Gruppentheorie, I, J. reine angew. Math. **174** (1935), 1—14. (64)

[2] Über eine Faktorgruppe freier Gruppen, I, Deutsche Math. **1** (1936), 772—782.

[3] Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung, J. reine angew. Math. **182** (1940), 158—177.

[4] Beiträge zur Gruppentheorie, II, J. reine angew. Math. **186** (1948), 165—169.

[5] Beiträge zur Gruppentheorie, III, Math. Nachr. **1** (1948), 1—24.

[6] Beiträge zur Gruppentheorie, IV, Math. Nachr. **3** (1949), 77—94. (Д. 18.2)

[7] Beiträge zur Gruppentheorie, VI, Math. Nachr. **16** (1957), 271—280, [58:10, 8593] (Д. 3.4)

[8] Automorphismen von Gruppen und Endoisomorphismen freier Gruppen, Ill. J. Math. **2** (1958), 759—763. [60:5, 4948] (Д. 15.1)

[9] Beiträge zur Gruppentheorie, IX, Arch. Math. **13** (1962),

49—54. [63:9, 147] (Д. 18.2)

Грюнберг (Gruenberg K. W.)

[1] Two theorems on Engel groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **49** (1953), 377—380. [54:1, 1566] (Д. 26.1, Д. 26.2)

[2] Residual properties of infinite soluble groups, Proc. London Math. Soc. **7** (1957), 29—62. [58:4, 2741] (Д. 7.3, Д. 9.2, Д. 11.3, Д. 17.9, Д. 24.5, Д. 24.6)

[3] The Engel elements of a soluble group, Ill. J. Math. **3** (1959), 151—168. [61:8, 184] (Д. 26.2, Д. 26.4)

[4] The upper central series in soluble groups, Ill. J. Math. **5** (1961), 436—466. [62:7, 162] (Д. 26.4)

[5] The residual nilpotence of certain presentations of finite groups, Arch. Math. **13** (1962), 408—417. [64:5, 168] (Д. 25.5)

Гуревич В. (Hurewicz W.)

[1] Zu einer Arbeit von O. Schreier, Hamburg. Abh. **8** (1930), 307—314. (36)

Гуревич Ю. Ш.

[1] Группы с характеристическим покрытием, Матем. зап. Уральск. ун-та **4** (1963), 32—39. [63:10, 151] (Д. 19.6)

Гуха (Guha U.)

[1] On the endomorphic mapping $\{m\}$ of a group, Bull. Calcutta Math. Soc. **38** (1946), 101—107.

Данвуди (Dunwoody M. J.)

[1] On relation groups, Math. Z. **81** (1963), 180—186. [63:11, 139] (Д. 3.4)

[2] On $T$-systems of groups, J. Austral. Math. Soc. **3** (1963), 172—179. [64:2, 253] (Д. 3.4)

Де-Брёйн (de Bruijn N. G.)

[1] Embedding theorems for infinite groups, Proc. Nederl. akad. **A60** (1957), 560—569; **A67** (1964), 594—595. [58:9, 7502; 65:6, 164] (Д. 1.2)

Де-Врис и Де-Миранда (de Vries H., de Miranda A. B.)

[1] Groups with a small number of automorphisms, Math. Z. 68 (1958), 450—464, [58:10, 8592] (Д. 3.1)

Де-Грот (de Groot J.)

[1] Exemple d'un groupe avec deux générateurs, contenant un sous-groupe commutatif sans un système fini de générateurs, Nieuw Archief voor Wiskunde 23 (1950), 128—130.

[2] An isomorphism criterion for completely decomposable abelian groups, Math. Ann. **132** (1956), 328—332. [57: 11, 8448] (Д. 35.3)

[3] Indecomposable abelian groups, Proc. Nederl. akad. A60 (1957), 137—145. [58:5, 3554] (Д. 31.2)

[4] Equivalent abelian groups, Canad. J. Math. **9** (1957), 291—297. [60:8, 8608] (Д. 35.3)

Де-Грот и Де-Врис (de Groot J., de Vries H.)

[1] Indecomposable abelian groups with many automorphisms, Nieuw Arch. Wisk. **6** (1958), 55—57. [60:2, 1372] (Д. 31.2)

Дедекинд (Dedekind R.)

[1] Über Gruppen, deren sämmtliche Teiler Normalteiler sind, Math. Ann. **48** (1897), 548—561.

[2] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, Math. Ann. **53** (1900), 371—403.

Джеббер (Jabber M. A.)

[1] On $S$-groups, Bull. Calcutta Math. Soc. **35** (1943), 111—113.

Джекобсон (Jacobson N.)

[1] Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, Ann. Math. **46** (1945), 695—707. (Д. 16.1)

Дженингс (Jennings S. A.)

[1] A note on chain conditions in nilpotent rings and groups.

Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 759—763. (53)

Джонс (Jones A. W.)

[1] The lattice isomorphisms of certain finite groups, Duke math. J. **12** (1945), 541—560. (44)

Джонсон (Johnson H. H.)

[1] On the anticenter of a group, Amer. Math. Monthly **68** (1961), 469—472. [62:1, 190] (Д. 3.3)

Дик (Dyck W.)

[1] Gruppentheoretische Studien, Math. Ann. **20** (1882), 1—44; **22** (1883), 70—108.

Диксмье (Dixmier S.)

[1] Exposants des quotients des suites centrales descendante et ascendante d'un groupe, C.R. Paris **259** (1964), 2751—2753. [65:4, 142] (Д. 3.3)

Диксон Л. (Dickson L. E.)

[1] Linear Groups, with an exposition of the Galois Field theory, Leipzig, 1901. (Заключение к 1-му изд.)

Диксон С. (Dickson S. E.)

[1] On torsion classes of abelian groups, J. Math. Soc. Japan **17** (1965), 30—35. [66:1, 209] (Д. 20.5)

Дицман А. П.

[1] О $p$-группах, ДАН СССР **15** (1937), 71—76. (53, 54)

[2] Sur les groupes infinis, C.R. Paris **205** (1937), 952—953.

[3] О центре $p$-групп, Труды семинара по теории групп, 1938, 30—34.

[4] Некоторые теоремы о бесконечных группах, Сборник памяти акад. Граве, 1940, 63—67.

[5] О мультигруппах классов сопряженных элементов группы, ДАН СССР **49** (1945), 323—326.

[6] On an extension of Sylow's theorem, Ann. Math. **48** (1947), 137—146. (54, Д. 18.1)

[7] О теореме Силова, ДАН СССР **59** (1948), 1235—1236. (54,

Д. 18.1)

[8] О мультигруппах, образуемых подмножествами группы, Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та **71** (1953), 71—79. [54:11, 5464] (Д. 27.1)

[9] О $p$-подгруппах групп и теоремах, аналогичных теореме Силова, Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та **108** (1957), 99—114. [59:4, 3546] (Д. 18.1)

Дицман А. П., Курош А. Г. и Узков А. И.

[1] Sylowsche Untergruppen von unendlichen Gruppen, Матем. сб. **3** (1938), 179—185. (54, Д. 18.2, Д. 18.3)

Длаб (Dlab V.)

[1] $D$-hodnost Abelovy grupy, časop. pěstov. mat. **82** (1957), 314—334. [59:1, 140] (Д. 28.2, Д. 29.3)

[2] Die Endomorphismenringe abelscher Gruppen und die Darstellung von Ringen durch Matrizenringe, Чехосл. матем. ж. **7** (1957), 485—523. [61:1, 217] (Д. 34.1)

[3] Заметка к теории полных абелевых групп, Чехосл. матем. ж. **8** (1958), 54—61. [59:6, 5570] (Д. 28.4, Д. 28.6)

[4] Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп, Чехосл. матем. ж. **9** (1959), 161—171. [61:6, 223] (Д. 28.6)

[5] Poznámka k jednomu problému týkajicimu se Frattiniho podgrup, Časop. pěstov. mat. **85** (1960), 87—90. [61:1, 219] (Д. 27.4)

[6] On a problem of Mazur and Ulam about irreducible generating systems in groups, Colloq. Math. **7** (1960), 171—176. [61:5, 202] (Д. 1.3)

[7] The Frattini subgroups of abelian groups, Чехосл. матем. ж. **10** (1960), 1—16. [61:6, 218] (Д. 27.4)

[8] On cyclic groups, Чехосл. матем. ж. **10** (1960), 244—254. [62:1, 192) (Д. 1.3)

[9] On a characterization of primary abelian groups of

bounded order, J. London Math. Soc. **36** (1961), 139—144. [62:4, 170] (Д. 28.6)

[10] On the dependence relation over abelian groups, Publ. Math. **9** (1962), 75—80. [64:3, 151] (Д. 35.4)

[11] A note on powers of a group, Acta sci. math. **25** (1964), 177—178. [66:1, 199] (Д. 1. 3)

Длаб и Коржинек (Dlab V., Kořinek V.)

[1] The Frattini subgroup of a direct product of groups, Чехосл. матем. ж. **10** (1960), 350—358. [61:6, 219] (Д. 27.4)

Домбек (Dombek J.)

[1] Anticenters of several classes of groups, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 738—741. [63:7, 140] (Д. 3.3)

Донияхи Х. А.

[1] Линейное представление свободного произведения циклических групп Уч. зап. ЛГУ **55** (1940), 158—165.

Дуингер (Dwinger Ph.)

[1] Direct products in modular lattices, Proc. Nederl. Acad. **A59** (1956), 435—443. [58:8, 6550] (Д. 5.3)

Дуингер и Де-Грот (Dwinger Ph., de Groot J.)

[1] On the axioms of Baer and Kurosh in modular lattices, Proc. Nederl. Acad. **A59** (1956), 596—601. [57:10, 7712] (Д. 5. 3)

Дьёдонне (Dieudonné J.)

[1] Sur les produits tensoriels, Ann. École Norm. Sup. **64** (1948), 101—117. (Д. 33.6)

[2] Sur les $p$-groupes abéliens infinis, Portug. Math. **11** (1952), 1—5. (Д. 28.2)

Дьюгид (Duguid A. M.)

[1] A class of hiper-$FC$-groups, Pacif. J. Math. **10** (1960), 117—120. [61:6, 215] (Д. 17.6)

Дьюгид и Маклейн Д. (Duguid A. M., McLain D. H.)

[1] *FC*-nilpotent and *FC*-soluble groups, Proc. Cambridge Phil. Soc. **52** (1956), 391—398. [57:5, 3800] (Д. 17.6)

Дэй (Dey I. M. S.)

[1] Relations between the free and direct products of groups, Math. Z. **80** (1962), 121—147. [64:8, 175] (Д. 7.3)

[2] Free products of Hopf groups, Math. Z. **85** (1964), 274—284. [65:12, 232] (Д. 7.2, Д. 15.1)

Дэн (Dehn M.)

[1] Über unendliche diskontinuierliche Gruppen, Math. Ann. **71** (1912), 116—144. (41)

Дэрри (Derry D.)

[1] Über eine Klasse von Abelschen Gruppen, Proc. London Math. Soc. **43** (1937), 490—506. (21, 32б, 32в, Д. 31.1)

[2] On finite abelian *p*-groups, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 874—881.

Дюбюк П. Е.

[1] О подгруппах конечного индекса бесконечной группы, Матем. сб. **10** (1942), 147—150.

Дюбюк П. Е. и Туркин В. К.

[1] Théorèmes sur les groupes infinis, C. R. Paris, **205** (1937), 435—437.

[2] Теоремы о бесконечных группах, Матем. сб. **3** (1938), 425—429.

Еремин И. И.

[1] Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп, Матем. сб. **47** (1959), 45—54. [60:10, 11336] (Д. 17.7)

[2] О центральных расширениях с помощью тонких слойно-конечных групп, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1960, № 2, 93—95. [61:5, 229] (Д. 17.7)

[3] О группах с конечными классами сопряженных подгрупп с заданными свойствами, ДАН СССР **137** (1961), 772—773. [62:2, 175] (Д. 17.7)

Ешманович (Jesmanowicz L.)

[1] **On direct decompositions of torsion free abelian groups, Bull. Acad. Polon.** 8 (1960), 505—510. [62:3, 178] (Д. 31.3)

Житомирский В. Г.

[1] Треугольные автоморфизмы в группах, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 187—194. [62:11, 144] (Д. 22.6)

[2] Треугольные группы автоморфизмов квазиоператорных групп, ДАН СССР **144** (1962), 487—489. [63:2, 189] (Д. 22.6)

[3] Треугольная группа автоморфизмов прямого произведения групп, Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1962), 30—36; **4**, № 1 (1963), 40—44; **4**, № 3 (1963), 89—94. [63:11, 163; 64:3, 158; 64:12, 172] (Д. 22.6)

Журавский В. С.

[1] О расщеплении некоторых смешанных абелевых групп, Матем. сб. **48** (1959), 499—508. [61:1, 209] (Д. 32.2)

[2] Обобщение некоторых критериев расщепления смешанных абелевых групп, Матем. сб. **51** (1960), 377—382. [61:7, 225] (Д. 32.2)

[3] К вопросу о группе абелевых расширений абелевых групп, ДАН СССР **134** (1960), 29—32. [62:8, 144] (Д. 33.2)

[4] О группе абелевых расширений периодической абелевой группы с помощью абелевой группы без кручения, УМН **16**, № 4 (1961), 161—166. [62:12, 144] (Д. 33.2)

Завало С. Т.

[1] Операторные Г-свободные группы, Матем. сб. **33** (1953), 399—432. [54:2, 2002] (Д. 7.5)

[2] Операторные $\mathcal{S}$-свободные группы, Укр. матем. ж. **16** (1964), 593—601, 730—751. [65:7, 173, 174] (Д. 7 5)

Зайцев Д. И.

[1] Группы с условием коммутаторной минимальности, Сиб. матем. ж. **6** (1965), 1014—1020. [66:2, 223] (Д. 17.4)

Залесский А. Е.

[1] О локально конечных группах с условием минимальности для централизаторов, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. н., 1965, № 3, 127—129. [66:3, 169] (Д. 18.1)

Зельманзон М. Е.

[1] О группах, у которых все подгруппы циклические, УМН **16**, № 2 (1961), 109—113. [62:1, 191] (Д. 1.3)

Зельмер (Zelmer V.)

[1] Despre un subgrup bază al unui grup abelian primar, An. Univ. Jasi **5** (1959), 1—4. [61:9, 235] (Д. 30.2)

Зиман (Zeeman E. C.)

[1] On direct sums of free cycles, J. London Math. Soc. **30** (1955), 195—212. [56:11, 7887] (Д. 33.5)

Иванюта И. Д.

[1] Силовские $p$-подгруппы счетной симметрической группы, Укр. матем. ж. **15** (1963), 240—249. [65:1, 181] (Д. 18.1)

Ивасава (Iwasawa K.)

[1] Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **4** (1941), 171—199. (44)

[2] Einige Sätze über freie Gruppen, Proc. Acad. Tokyo **19** (1943), 272—274. (36)

[3] On the structure of infinite $M$-groups, Jap. J. Math. **18** (1943), 709—728. (44, Д. 14.2)

Ивахори и Хаттори (Iwahori N., Hattori A.)

[1] On associative compositions in finite nilpotent groups, Nagoya Math. J. **7** (1954), 145—148. [55:10, 4894] (Д. 1.1)

Ирвин (Irwin J. M.)

[1] High subgroups of abelian torsion groups, Pacif. J. Math. 11 (1961), 1375—1384. [63:4, 150] (Д. 29.4)

Ирвин и Кхаббаз (Irwin J. M., Khabbaz S. A.)

[1] On generating subgroups of abelian groups, Proc. Colloq. on abelian groups, 1963, Budapest, 1964, 87—97. [66:1, 213] (Д. 28.3, Д. 30.1)

Ирвин, Пирси и Уокер Е. (Irwin J., Peercy C., Walker E.)

[1] Splitting properties of high subgroups, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 185—192. [63:7, 152] (Д. 29.4, Д. 32.2)

Ирвин и Уокер Е. (Irwin J. M., Walker E. A.)

[1] On isotype subgroups of abelian groups, Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 451—460. [63:4, 148] (Д. 29.3, Д. 29.4)

[2] On $N$-high subgroups of abelian groups, Pacif. J. Math. 11 (1961), 1363—1374. [63:4, 149] (Д. 29.4)

Ито (Itô N.)

[1] Note on $S$-groups, Proc. Japan Acad. 29 (1953), 149—150. [57:7, 5362] (Д. 27.4, Д. 27.5)

[2] Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen, Math. Z. 62 (1955), 400—401. [56:6, 4349] (Д. 13.2)

Йонсон (Jónsson B.)

[1] On unique factorization problem for torsionfree abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 364. (32, Д. 31.3)

[2] Universal relational systems, Math. Scand. 4 (1956), 193—208. [58:6, 4555] (Д. 1.2)

[3] On direct decompositions of torsionfree abelian groups, Math. Scand. 5 (1957), 230—235. [59:3, 2358] (Д. 31.3)

[4] On direct decomposition of torsion free abelian groups, Math. Scand. 7 (1959), 361—371. [62:2, 187] (Д. 35.3)

Казачков Б. В.

[1] О теоремах типа Силова, ДАН СССР **80** (1951), 5—7. (60)

[2] Об одной локальной теореме в теории групп, ДАН СССР **83** (1952), 525—528. (60)

[3] О некоторых условиях факторизуемости периодических групп, Уч. зап. Томск. пед. ин-та **15** (1956), 452—457. [57:11, 8454] (Д. 13.4)

[4] О теореме Шура — Цасенхауза для счетных локально конечных групп, Матем. сб. **50** (1960), 499—506. [61:3, 185] (Д. 18.2)

[5] Об условиях сильной факторизуемости групп, Матем. сб. **57** (1962), 323—332; **63** (1964), 646. [63:6, 178; 64:10, 171] (Д. 13.4, Д. 18.2)

[6] О конечной П-сопряженности групп, ДАН СССР **144** (1962), 971—973. [63:6, 177] (Д. 18.2)

Калашников В. А. и Курош А. Г.

[1] Свободные произведения групп с объединенными подгруппами центров, ДАН СССР **1** (1935), 285—286. (Заключение к 1-му изд.)

Калужнин Л. А.

[1] Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn A. Kurosch, Hamburg. Abh. **12** (1938), 247—255. (326)

[2] Une méthode de construction de sous-groupes infra-invariants, C. R. Paris **208** (1939), 1869—1871.

[3] Sur les $p$-groupes de Sylow du groupe symétrique du degré $p^m$, C. R. Paris **221** (1945), 222—224. (Д. 12.3)

[4] La structure du $p$-groupe de Sylow du groupe symétrique du degré $p^2$, C. R. Paris **222** (1946), 1424—1425.

[5] Sur les $p$-groupes de Sylow du groupe symétrique du degré $p^m$ (Suite centrale ascendante et descendante), C. R. Paris **223** (1946), 703—705.

[6] Sur les $p$-groupes de Sylow du groupe symétrique du

degré $p^m$ (Sous-groupes caractéristiques, sous-groupes parallelotopiques), C. R. Paris **224** (1947), 253—255.

[7] Sur le groupe $P_\infty$ des tableaux infinis, C. R. Paris **224** (1947), 1097—1099.

[8] Sur les groupes abéliens primaires sans éléments de hauteur infinie, C. R. Paris **225** (1947), 713—715. (26)

[9] Sur les sous-groupes centraux d'un produit complet de groupes abéliens, C. R. Paris **229** (1949), 1289—1291.

[10] Caractérisation des certains sous-groupes centraux d'un produit complet de groupes abéliens, C. R. Paris **230** (1950), 1633—1634.

[11] Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait, C. R. Paris **230** (1950), 2067—2069. (Д. 23.3)

[12] Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait. (Généralisation d'un théorème de M. Ph. Hall), C. R. Paris **231** (1950), 400—402. (Д. 23.3)

[13] Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen, Ber. Math.-Tagung Berlin, 1953, 164—172. [55:1, 91] (Д. 22.3, Д. 22.4)

[14] Центральные расширения абелевых групп, I, Укр. матем. ж. **8** (1956), 262—272. [57:7, 5359] (Д. 12.3)

[15] Центральные Г-подрасширения полного произведения абелевых групп, Укр. матем. ж. **8** (1956), 413—422. [57:10, 7657] (Д. 12.3)

[16] Об одном отношении Галуа в теории групп, Укр. матем. ж. **11** (1959), 38—51. [61:3, 203] (Д. 22.4)

Калужнин Л. А. и Краснер (Kaloujnine L. et Krasner M.)

[1] Le produit complet des groupes de permutations et le problème d'extension des groupes. C. R. Paris **227** (1948), 806—808.

[2] Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension des groupes, Acta Sci. Math., Szeged **13** (1950), 208—230; **14** (1951), 39—66.

[3] Produit complet des groupes de permutations et le problème d'extension des groupes, III, Acta Sci. Math., Szeged, **14** (1951), 69—82. (Д. 12.1, Д. 12.3)

Камм (Camm R.)

[1] Simple free products, J. London Math. Soc. **28** (1953), 66—76. [53:1, 86] (Д. 2.4, Д. 8.1)

Капланский (Kaplansky I.)

[1] A note on groups without isomorphic subgroups, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 529—530.

[2] Elementary divisors and modules, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 464—491.

[3] Some results on abelian groups, Proc. Nat. Acad. USA **38** (1952), 538—540. (Д. 30.3, Д. 31.1, Д. 34.1)

[4] Infinite abelian groups, Ann. Arbor, 1954. [58:1, 154] (Д. 28.1, Д. 29.5, Д. 30.3)

Капланский и Макки (Kaplansky I., Mackey G. W.)

[1] A generalization of Ulm's theorem, Summa Brasil. Math. **2** (1951), 195—202. (Д. 30.3)

Каппе (Kappe W.)

[1] Die $A$-Norm einer Gruppe, Ill. J. Math. **5** (1961), 187—197. [62:3, 166] (Д. 3.3, Д. 26.4)

Карасев Г. А.

[1] Факторизация некоторых классов групп, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 378—385. [63:6, 183] (Д. 18.2)

Каргаполов М. И.

[1] О факторизации П-отделимых групп, ДАН СССР **114** (1957), 1155—1157. [58:9, 7496] (Д. 18.3)

[2] О сопряженности силовских $p$-подгрупп локально нормальной группы, УМН **12**, № 4 (1957), 297—300. [58:10, 8586]

(Д. 18.1)

[3] К теории полупростых локально нормальных групп, Научн. докл. высш. шк., Физ.-матем. науки, 1958, № 6, 3—7. [60:10, 11328] (Д. 16.7)

[4] К теории Z-групп, ДАН СССР **125** (1959), 255—257, [60:2, 1385] (Д. 25.7)

[5] Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп, ДАН СССР **127** (1959), 1164—1166. [60:8, 8612] (Д. 13.4, Д. 18.1, Д. 18.2)

[6] Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами, Сиб. матем. ж. **2** (1961), 853—873. [62:8, 143] (Д. 16.5)

[7] О пополнении локально нильпотентных групп, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 695—700. [63:5, 198] (Д. 19.4)

[8] О П-пополнении локально нильпотентных групп, Алгебра и логика (семинар) **1**, № 1 (1962), 5—13. [63:11, 165] (Д. 19.4)

[9] О разрешимых группах конечного ранга, Алгебра и логика (семинар) **1**, № 5 (1962), 37—44. [63:9, 160] (Д. 23.2)

[10] О проблеме О. Ю. Шмидта, Сиб. матем. ж. **4** (1963), 232—235. [63:8, 145] (Д. 16.5)

[11] Об обобщенных разрешимых группах, Алгебра и логика (семинар) **2**, № 5 (1963), 19—28. [64:10, 174] (Д. 16.5, Д. 18.3, Д. 23.1, Д. 25.1)

Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. и Ремесленников В. Н.

[1] О пополнении групп, ДАН СССР **134** (1960), 518—520. [61:6, 210] (Д. 19.4)

[2] Об одном способе пополнения групп, Уч. зап. Пермск. ун-та **17** (1960), 9—11. [62:3, 195] (Д. 19.4)

Каролинская Л. Н.

[1] Прямые разложения абстрактных алгебр с отмеченными подалгебрами, Изв. высш. учебн. заведений, Математика,

1960, № 4, 106—113. [62:6, 242] (Д. 6.1)

Каррас, Магнус и Солитэр (Karrass A., Magnus W., Solitar D.)

[1] Elements of finite order in groups with a single defining relation, Comm. pure and appl. Math. **13** (1960), 57—66. [62:8, 148] (Д. 15.2)

Каррас и Солитэр (Karrass A., Solitar D.)

[1] Some remarks of the infinite symmetric groups, Math. Z. **66** (1956), 64—69. [57:6, 4633] (Д. 2.4)

[2] Note on a theorem of Schreier, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 696—697. [58:7, 5524] (Д. 9.1)

[3] On free products, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 217—221. [59:9, 8849] (Д. 7.2)

[4] Subgroup theorems in the theory of groups given by defining relations, Comm. pure and appl. Math. **11** (1958), 547—571. [60:2, 1388] (Д. 7.1, Д. 9.1)

Картан и Эйленберг (Cartan H., Eilenberg S.)

[1] Homological algebra, Princeton, 1956. (Русский перевод: Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960.) (Д. 12.1)

Картер (Carter R. W.)

[1] Nilpotent selfnormalizing subgroups of soluble groups, Math. Z. **75** (1961), 136—139. [61:12, 272] (Д. 23.2)

Касселс (Cassels J. W. S.)

[1] On the subgroups of infinite abelian groups, J. London Math. Soc. **33** (1958), 281—284. [59:9, 8842] (Д. 31.7)

Кегель (Kegel O. H.)

[1] Lokal endliche Gruppen mit nichttrivialer Partition, Arch. Math. **13** (1962), 10—28. [63:5, 185] (Д. 19.7)

Кемпбелл (Campbell M.)

[1] Countable torsionfree abelian groups, Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 1—23. [61:8, 192] (Д. 31.1)

Кемхадзе Ш. С.

[1] О регулярности $p$-групп при $p=2$, Сообщ. АН Груз. ССР

**11** (1950), 607—611. (Д. 18.4)

[2] Базы единственности в бесконечных регулярных $p$-группах, Укр. матем. ж. **4** (1952), 57—64. (Д. 18.4)

[3] К определению регулярных $p$-групп, УМН **7**, № 6 (1952), 193—196. (Д. 18.4)

[4] Регулярные $p$-группы без элементов бесконечной высоты, Сообщ. АН Груз. ССР **17** (1956), 673—680. [57:5, 3799] (Д. 18.4)

[5] П-регулярные группы, Сообщ. АН Груз. ССР **27** (1961), 3—8. [62:6, 164] (Д. 18.4)

[6] О группах, порожденных нильпотентными и $ZA$-подгруппами, Сиб. матем. ж. **5** (1964), 827—837. [65:3, 192] (Д. 13.2)

[7] Факторизация групп достижимыми подгруппами, Сиб. матем. ж. **5** (1964), 838—843. [65:3, 200] (Д. 13.2)

[8] Квазинильпотентные группы, ДАН СССР **155** (1964), 1003—1005. [64:9, 162] (Д. 25.3, Д. 26.5)

[9] О стабильных группах автоморфизмов, ДАН СССР **158** (1964), 510—512. [65:3, 194] (Д. 26.5)

[10] К определению нильгруппы Бэра, Сообщ. АН Груз. ССР **33** (1964), 279—284. [64:12, 173] (Д. 26.5)

[11] О внешне нильпотентных группах автоморфизмов, Сообщ. АН Груз. ССР **34** (1964), 265—270. [64:12, 174] (Д. 22.5)

[12] О некоторых свойствах факторизуемых групп, Сообщ. АН Груз. ССР **35** (1964), 257—263. [65:3, 201] (Д. 13.2)

Кертес (Kertész A.)

[1] On groups every subgroup of which is a direct summand, Publ. Math. **2** (1951), 74—75. (Д. 29.1)

[2] On the decomposibility of abelian $p$-groups into the direct sum of cyclic groups, Acta Math. Hung. **3** (1952), 122—126. (Д. 28.2)

[3] On fully decomposable abelian torsion groups, Acta Math. Hung. **3** (1952), 225—232. (Д. 28.2)

[4] On subgroups and homomorphic images, Publ. Math. **3** (1953), 174—179. [57:1, 142] (Д. 28.4)

[5] On a theorem of Kulikov and Dieudonné, Acta sci. math. **15** (1953), 61—69. [55:5, 2117] (Д. 28.2)

[6] Abel-féle torziócsoportok, Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl. **4** (1954), 111—126. [55:10, 4890] (Д. 28.2)

Кертес и Селе (Kertész A., Szele T.)

[1] Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image, Acta sci. math. **15** (1953), 70—76. [55:5, 2118] (Д. 35.1)

Кёлер (Koehler J.)

[1] Some torsion free rank two groups, Acta Sci. Math. **25** (1964), 186—190. [66:4, 126] (Д. 31.1)

[2] The type set of a torsion-free group of finite rank, Ill. J. Math. **9** (1965), 66—86. [66:12, 176] (Д. 31.1)

Кётэ (Köthe G.)

[1] Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring, Math. Z. **39** (1934), 31—44.

Кикодзе Э. Б.

[1] О сложных коммутаторах элементов группы, УМН **12**, № 4 (1957), 301—303. [58:11, 9567] (Д. 24.6, Д. 27.1)

Киокемейстер (Kiokemeister F.)

[1] A note on the Schmidt-Remak theorem, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 957—958.

Кишкина З. М.

[1] Эндоморфизмы $p$-примитивных абелевых групп без кручения, Изв. АН СССР, сер. матем, **9** (1945), 201—232. (21)

Клиффорд (Clifford A. H.)

[1] Representations induced in an invariant subgroup, Ann.

of Math. **38** (1937), 533—550.

Клиффорд и Маклейн (Clifford A. H. and MacLane S.)

[1] Factor-sets of a group in its abstract unit group, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 385—406.

Клэпхем (Clapham C. R. J.)

[1] Finitely presented groups with word problem of arbitrary degrees of insolubility, Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 633—676. [65:7, 175] (Д. 15.3)

Кнезер и Сверчковский (Kneser M., Swierszkowski S.)

[1] Embedding in groups of countable permutations, Coll. Math. **7** (1960), 177—179. [61:6, 205] (Д. 1.2)

Ковач (Kovács L.)

[1] On subgroups of the basis subgroup, Publ. Math. **5** (1958), 261—264. (Д. 30.1)

[2] Groups with regular automorphisms of order four, Math. Z. **75** (1961), 277—294. [62:2, 190] (Д. 3.1)

[3] On a paper of Ladislav Procházka, Чехосл. матем. ж. **13** (1963), 612—618. [65:1, 174] (Д. 31.4, Д. 32.2)

[4] Admissible direct decompositions of direct sums of abelian groups of rank one, Publ. Math. **10** (1963), 254—263. [65:5, 168] (Д. 28.5)

Ковач, Нейман Б. и Де-Врис (Kovács L. G., Neumann B. H., de Vries H.)

[1] Some Sylow subgroups, Proc. Roy. Soc. **A260** (1961), 304—316. [62:2, 192] (Д. 18.1)

Ковач и Ньюмэн (Kovács K. G., Newman M. F.)

[1] Direct complementation in groups with operators, Arch. Math. **13** (1962), 427—433. [63:8, 156] (Д. 5.1)

Когаловский С. Р.

[1] Структурные характеристики универсальных классов, Сиб. матем. ж. **4** (1963), 97—119. [64:3, 69] (Д. 10.1)

[2] К теореме Биркгофа, УМН **20**, № 5 (1965), 206—207. [66:

3, 258] (Д. 10.1)

Коккрофт (Cockcroft W. H.)

[1] The word problem in a group extension, Quart. J. (Oxford sec. series) **2** (1951), 123—134.

Кокстер (Coxeter H. S. M.)

[1] On simple isomorphism between abstract groups, J. London Math. Soc. **9** (1934), 211—212.

[2] Abstract groups of the form $V_i^k = V_j^3 = (V_i V_j)^2 = 1$, J. London Math. Soc. **9** (1934), 213—219. (Заключение к 1-му изд.)

[3] The groups determined by the relations $S^l = T^m = (S^{-1} T^{-1} ST)^p = 1$, I, Duke math. J. 2 (1936), 61—73. (Заключение к 1-му изд.)

[4] An abstract definition for the alternating group in terms of two generators, J. London Math. Soc. **11** (1936), 150—156.

[5] The abstract groups $R^m = S^m = (R^j S^j)^{p_j} = 1$, $S^m = T^2 = (S^j T)^{2p_j} = 1$, and $S^m = T^2 = (S^{-j} T S^j T)^{p_j} = 1$, Proc. London Math. Soc. **41** (1936), 278—301. (Заключение к 1-му изд.)

[6] The abstract groups $G^{m,n,p}$, Trans. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 73—150. (Заключение к 1-му изд.)

[7] A method for proving certain abstract groups to be infinite, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 246—251.

Кокстер и Мозер (Coxeter H. S. M., Moser W. O. J.)

[1] Generators and relations for discrete groups, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957; 2-е изд., 1965. [61:11, 222] (Д. 15.2)

Колеттис (Kolettis G.)

[1] Direct sums of countable groups, Duke Math. J. **27** (1960), 111—125. [61:10, 201] (Д. 30.3)

[2] Semi-complete primary abelian groups, Proc. Amer.

Math. Soc. **11** (1960), 200—205. [62:1, 200] (Д. 30.3)

Кон (Cohn P. M.)

[1] A countable generated group which cannot be covered by finite permutable subsets, J. London Math. Soc. **29** (1954), 248—249. [55:3, 1113] (Д. 19.6)

[2] A remark on the general product of two infinite cyclic groups, Arch. Math. **7** (1956), 94—99. [57:2, 1159] (Д. 13.2)

[3] The complement of a finitely generated direct summand of an abelian group, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 520—521. [57:7, 5356] (Д. 5.1)

Конрад (Conrad P.)

[1] The groups of word preserving permutations of a group, J. Indian Math. Soc. **22** (1958), 149—179. [60:11, 12517] (Д. 3.5)

[2] Completions of groups of class 2, Ill. J. Math. **5** (1961), 212—224. [62:2, 191] (Д. 19.4)

[3] Skew tensor products and groups of class two, Nagoya Math. J. **23** (1963), 15—51. [65:2, 273] (Д. 27.1)

Конторович П. Г.

[1] О некоторых свойствах полупрямых произведений, ДАН СССР **22** (1939), 557—559.

[2] Инвариантно покрываемые группы, Матем. сб. **8** (1940), 423—430. (Д. 19.6)

[3] Группы с базисом расщепления, I, Матем. сб. **12** (1943), 56—70. (Д. 19.6)

[4] Группы с базисом расщепления, II, Матем. сб. **19** (1946), 287—308. (Д. 19.6)

[5] Группы с базисом расщепления, III, Матем. сб. **22** (1948), 79—100. (56, Д. 19.6)

[6] К теории некоммутативных групп без кручения, ДАН СССР **59** (1948), 213—216.

[7] Группы с базисом расщепления, IV, Матем. сб. **26** (1950), 311—320. (32, 56, Д. 19.6)

[8] Инвариантно покрываемые группы, II, Матем. сб. **28** (1951), 79—88. (63, Д. 19.6)

[9] Замечания о гиперцентрах группы, Уч. зап. Уральск. ун-та **23** (1960), 27—29. [61:9, 232] (Д. 3.3)

Конторович П. Г., Пекелис А. С. и Старостин А. И.

[1] Структурные вопросы теории групп, Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1961), 3—50. [62:10, 131] (Д. 14.1, Д. 19.6)

Конторович П. Г. и Плоткин Б. И.

[1] Структуры с аддитивным базисом, Матем. сб. **35** (1954), 187—192. [56:4, 2826] (Д. 14.4)

Коржинек (Kořinek V.)

[1] Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes, Čas. mat. fys. **66** (1937), 261—286, **67** (1938), 209—210. (42, Заключение к 1-му изд., Д. 5.3)

[2] Les groupes qui ne contiennent pas des sousgroupes caractéristiques propres, Věstn. Kral. Česke Spol. Nauk, 1938, 1—20.

[3] Bemerkung über charakteristisch einfache Gruppen, Věstn. Kral. Česke Spol. Nauk (1940), 1—8.

[4] Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden, Věstn. Kral. Česke Spol. Nauk (1941), 1—29. (44)

Корнер (Corner A. L.)

[1] A note on rank and direct decompositions of torsion-free abelian groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **57** (1961), 230—233. [61:11, 206] (Д. 31.3)

[2] Wildly embedded subgroups of complete direct sums of cyclic groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **59** (1963), 249—251. [63:11, 156] (Д. 31.6)

[3] Every countable reduced torsion-free ring is an endomor-

phism ring, Proc. London Math. Soc. **13** (1963), 687—710. [65:5, 171] (Д. 31.3, Д. 34.1)

[4] On a conjecture of Pierce concerning direct decompositions of abelian groups, Proc. Colloq. on Abelian groups, 1963, Budapest, 1964, 43—48. [65:5, 167] (Д. 31.4)

[5] Three examples on hopficity in torsion-free abelian groups, Acta Math. Hung. **16** (1965), 303—310. [66:11, 165] (Д. 34.1)

Кострикин А. И.

[1] Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5, Изв. АН СССР, сер. матем., **19** (1955), 233—244. [56:7, 5133] (Д. 16.4)

[2] О связи между периодическими группами и кольцами Ли, Изв. АН СССР, сер. матем., **21** (1957), 289—310. [59:5, 4483] (Д. 16.4)

[3] Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля, Изв. АН СССР, сер. матем., **21** (1957), 515—540. [59:5, 4484] (Д. 16.4)

[4] О проблеме Бернсайда, Изв. АН СССР, сер. матем., **23** (1959), 3—34. [60:7, 7311] (Д. 16.4)

[5] Об энгелевых свойствах групп с тождественным соотношением $x^{p^{\alpha}}=1$, ДАН СССР **135** (1960), 524—526. [62:3, 193] (Д. 16.4)

[6] Конечные группы, «Итоги науки. Алгебра. 1964», М., 1966, 7—46. (Д. Предисловие)

Кохендёрфер (Kochendörffer R.)

[1] Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, J. reine und angew. Math. **192**, (1953), 96—101. [55:8, 3634] (Д. 13.3)

[2] Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen, Leipzig, 1966.

Коэн (Cohen D. E.)

[1] Certain subgroups of free products, Mathematika **7** (1960), 117—124. [62:4, 181] (Д. 7.3)

[2] A topological proof in group theory, Proc. Cambr. Phil. Soc. **59** (1963), 277—282. [63:11, 178] (Д. 8.1)

Коэн и Линдон (Cohen D. E., Lyndon R. C.)

[1] Free bases for normal subgroups of free groups, Trans. Amer. Math. Soc. **108**, (1963), 526—537. [64:5, 180] (Д. 9.2)

Краснер (Krasner M.)

[1] Une généralisation de la notion de sousgroupe invariant, C. R. Paris **208** (1939), 1867—1869. (Д. 25.1)

Краузе (Krause E. F.)

[1] Groups of exponent 8 satisfy the 14th Engel congruence, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 491—496. [65:1, 171] (Д. 16.4)

[2] On the collection process, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 497—504. [65:1, 172] (Д. 16.4)

Крауч (Crouch R. B.)

[1] A class of irreducible systems of generators for infinite symmetric groups, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 910—911. [60:11, 12518] (Д. 1.3)

Кроули (Crawley P.)

[1] An infinite primary abelian group without proper isomorphic subgroups, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 463—467. [63:7, 151] (Д. 30.2)

[2] Solution of Kaplansky's test problems for primary abelian groups, J. of Algebra **2** (1965), 413—431. (Д. 30.2)

[3] The cancellation of torsion abelian groups in direct sums, J. of Algebra **2** (1965), 432—442. (Д. 30.2)

Кроули и Йонсон (Crawley P., Jónsson B.)

[1] Refinements for infinite direct decompositions of alge-

braic systems, Pacif. J. Math. 14 (1964), 797—855. [66:6, 249] (Д. 5.3)

Круль В. (Krull W.)

[1] Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Z. 23 (1925), 161—196.

[2] Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, S.-B. Heidelberg. Akad., 1926, 1—32.

[3] Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen, S.-B. Heidelberg. Akad., 1932, 2. Abh., 13—38 (Beitr. zur Algebra, 19). (42)

Круль М. (Król M.)

[1] On free generators of the commutator subgroup of a free group, Bull. Acad. Polon. 13 (1965), 279—282. [66:2, 231] (Д. 9.2)

Кубота (Kubota R.)

[1] The subgroup theorem, Arch. Math. 16 (1965), 3—5. [65:12, 200] (Д. 9.1)

Кулаков А. А.

[1] Über die Anzahl der eigentlichen Untergruppen und der Elemente von gegebener Ordnung in $p$-Gruppen, Math. Ann. 104 (1931), 778—793.

Кулатилака (Kulatilaka C. R.)

[1] Infinite abelian subgroups of some infinite groups, J. London Math. Soc. 39 (1964), 240—244. [65:2, 271] (Д. 23.4, Д. 25.4)

Куликов Л. Я.

[1] К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. сб. 9 (1941), 165—182. (25, 26, 29, Заключение к 1-му изд., Д. 29.1)

[2] К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. сб. 16 (1945), 129—162 (23, 24, 26, 28, Д. 30.1, Д. 30.2)

[3] О прямых разложениях групп, Укр. матем. журн. **4** (1952), 230—275, 347—372. (Д. 5.2, Д. 5.5, Д. 28.5, Д. 31.4)

[4] Обобщенные примарные группы, Тр. Моск. матем. о-ва **1** (1952), 247—326; **2** (1953), 85—167. [55:7, 3087] (37а, Ч. 30.3)

[5] Универсальпо полные абелевы группы, Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда **1** (1956), 26—28. [57:3, 2073] (Д. 29.5)

[6] Условия расщепляемости смешанных абелевых групп, УМН **13**, № 3 (1958), 247. [60:8, 8605] (Д. 32.2)

[7] Группы расширения абелевых групп, Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда **2** (1961), 9—11. (Д. 33.2)

[8] Строение группы абелевых расширений произвольной абелевой группы с помощью периодической, УМН **19**, № 2 (1964), 228. (Д. 33.2)

Кун (Kuhn H. W.)

[1] Subgroup theorems for groups presented by generators and relations, Ann. of Math. **56** (1952), 22—46. (Д. 6.1, Д. 7.1, Д. 8.1)

Курата (Kurata Y.)

[1] A decomposition of normal subgroups in a group, Osaka J. Math. **1** (1964), 201—229. [66:3, 166] (Д. 17.5)

Курош А. Г.

[1] Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, Math. Ann. **106** (1932), 107—113. (42, Д. 5.3, Д. 29.1)

[2] Über freie Produkte von Gruppen, Math. Ann. **108** (1933), 26—36. (35, Заключение к 1-му изд.)

[3] Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen, Math. Ann. **109** (1934), 647—660. (34, 35, Д. 7.1)

[4] Eine Verallgemeinerung des Jordan-Hölderschen Satzes, Math. Ann. **111** (1935), 13—18. (56)

[5] Über absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Матем. сб. **1** (1936), 345—350. (45, 47а, Д. 5.2)

[6] **Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range, Ann. Math. 38** (1937), 175—203. (32б, 32в, Д. 31.1)

[7] Пути развития и некоторые очередные проблемы теории бесконечных групп, УМН, вып. 3 (1937), 5—15. (Д. 11.1)

[8] **Zum Zerlegungsproblem der Theorie der freien Produkte**, Матем. сб. **2** (1937), 995—1001. (35)

[9] Несколько замечаний к теории бесконечных групп, Матем. сб. **5** (1939), 347—354. (26, 37а, 54)

[10] Локально свободные группы, ДАН СССР **24** (1939), 99—101. (37а)

[11] Теорема Жордана — Гёльдера в произвольных структурах, Сборник памяти акад. Граве (1940), 110—116. (44)

[12] К теории частично упорядоченных систем конечных множеств, Матем. сб. **5** (1939), 343—346. (55)

[13] Изоморфизмы прямых разложений, Изв. АН СССР, сер. матем., **7** (1943), 185—202. (42, 44, 45, Д. 5.2, Д. 5.5)

[14] Композиционные системы в бесконечных группах, Матем. сб. **16** (1945), 59—72. (56)

[15] Силовские подгруппы нульмерных топологических групп. Изв. АН СССР, сер. матем., **9** (1945), 65—78. (54, Д. 18.1)

[16] Изоморфизмы прямых разложений, II. Изв. АН СССР, сер. матем., **10** (1946), 47—72. (42, 47, Д. 5.2, Д. 5.3, Д. 5.5)

[17] Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах, Изв. АН СССР, сер. матем., **5** (1941), 233—241. (Д. 16.1)

[18] Радикалы колец и алгебр, Матем. сб. **33** (1953), 13—26.

[55:4, 1680] (Д. 20.1)

[19] Прямые разложения в алгебраических категориях, Тр. Моск. матем. о-ва 8 (1959), 391—412; **9** (1960), 562. [61:3, 281] (Д. 5.3)

[20] Свободные суммы мультиоператорных групп, Acta Sci. Math. **21** (1960), 187—196. [61:4, 218] (Д. 7.5)

[21] Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962. (Д. 4.3, Д. 7.1, Д. 10.1)

[22] Радикалы в теории групп, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 912—931; **6** (1965), 715. [64:6, 173] (Д. 20.1 — Д. 20.5)

Курош А. Г. и Черников С. Н.

[1] Разрешимые и нильпотентные группы, УМН **2**, № **3** (1947), 18—59. (55—58, 63, 64, Д. 23.1, Д. 25.1, Д. 25.5, Д. 25.7)

Курцио (Curzio M.)

[1] Su di un particolare isomorfismo di struttura, Ricerche Mat. **2** (1953), 288—300. [56:4, 2808] (Д. 14.6)

[2] Su alcuni gruppi complementati, Ricerche Mat. 8 (1959), 172—179. [60:12, 13601] (Д. 14.2)

[3] Sugli automorfismi uniformi nei gruppi a condizione minimale, Riv. mat. Univ. Parma **1** (1960), 107—122. [61:6, 221] (Д. 3.1)

[4] Alcuni criteri di finitezza per i gruppi a condizione massimale o minimale, Ric. Mat. **9** (1960), 248—254. [61:10, 203] (Д. 17.1)

Кутыев К. М.

[1] О $\Pi C$-изоморфизме некоторых классов $R$-групп, Изв. АН СССР, сер. матем., **27** (1963), 701—722. [64:3, 144] (Д. 14.6)

[2] Замечание о $\Pi C$-изоморфизме $R$-групп, локально удовлетворяющих условию $(N)$, Укр. матем. ж. **16** (1964), 534—536. [65:2, 260] (Д. 14.6)

Кхаббаз (Khabbaz S. A.)

[1] Abelian torsion groups having a minimal system of generators, Trans. Amer. Math. Soc. **98** (1961), 527—538. [62:1, 197] (Д. 30.1)

[2] On a theorem of Charles and Erdélyi, Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 103—104. [62:1, 198] (Д. 29.4)

[3] The subgroups of a divisible group $G$ which can be represented as intersections of divisible subgroups of $G$, Pacif. J. Math. **11** (1961), 267—273. [62:6, 157] (Д. 28.4)

[4] On the decomposability of abelian groups, J. London Math. Soc. **38** (1963), 137—147. [64:5, 177] (Д. 30.1, Д. 30.4)

Кхаббаз и Уокер Е. (Khabbaz S. A., Walker E. A.)

[1] The number of basic subgroups of primary groups, Acta Math. Hung. **15** (1964), 153—155. [65:1, 175] (Д. 30.1)

Лазар (Lazard M.)

[1] Problèmes d'extension concernant les $N$-groupes; inversion de la formule de Hausdorff, C. R. Paris **237** (1953), 1377—1379. [55:10, 4895] (Д. 19.1)

[2] Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie, Ann. Ecole norm. supér. **71** (1954), 101—190 [56:1, 221] (Д. 19.4, Д. 25.5)

Ларин С. В.

[1] Полуизоморфизмы периодических абелевых групп, Сиб. матем. ж. **7** (1966), 298—306. [66:10, 140] (Д. 2.1)

Ларин С. В. и Лойко Н. В.

[1] Полуизоморфизмы абелевых групп без кручения, Сиб. матем. ж. **7** (1966), 293—297. [66:11, 164] (Д. 2.1)

Леви (Levi F.)

[1] Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen, Dissertation, Leipzig, 1917. (32б, 32в)

[2] Über die Untergruppen freier Gruppen, Math. Z. **32** (1930), 315—318 (36, Д. 9.1)

[3] Über die Untergruppen der freien Gruppen, II, Math. Z. **37** (1933), 90—97. (37, Д. 9.1)

[4] The commutatorgroup of a free product, J. Indian Math. Soc. **4** (1940), 136—144.

[5] On the number of generators of a free product and a lemma of Alexander Kurosch, J. Indian Math. Soc. **5** (1941), 149—155.

[6] Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions, J. Indian Math. Soc. **6** (1942), 87—97. (14, Д. 26.2, Д. 27.1)

[7] Notes on group theory, J. Indian Math. Soc. **8** (1944), 1—9, 44—56, 78—91; **9** (1945), 37—42. (Д. 11.4)

Леви и Ван-дер-Варден (Levi F. und Van der Waerden B. L.)

[1] Über eine besondere Klasse von Gruppen, Hamburg. Abh. **9** (1932), 154—158. (38, Заключение к 1-му изд., (Д. 16.3)

Левин Н. (Levine N.)

[1] The anticenter of a group, Amer. Math. Monthly **67** (1960), 61—63. [60:12, 13594] (Д. 3.3)

Левин Ф. (Levin F.)

[1] Solutions of equations over groups, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 603—604. [63:8, 142] (Д. 19.5)

[2] On some varieties of soluble groups, I, Math. Z **85** (1964), 369—372. [65:7, 179] (Д. 24.6)

[3] One variable equations over groups, Arch. Math. **15** (1964), 179—188. [65:12, 227] (Д. 15.1, Д. 19.5)

Левич Е. М.

[1] Локально достижимые элементы группы, Изв. АН Латв. ССР, сер. физ. и техн. наук, 1965, № 3, 71—73. [65:11, 193] (Д. 26.6)

Ледерман и Нейман Б. (Ledermann W., Neumann B. H.)

[1] On the order of the automorphism group of a finite group, II, Proc. Roy. Soc. **A235** (1956), 235—246. [59:3 2355] (Д. 3.1)

Лептин (Leptin H.)

[1] Zur Theorie der überabzählbaren abelschen $p$-Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg **24** (1960), 79—90. [61:9, 243] (Д. 30.2)

[2] Abelsche $p$-Gruppen und ihre Automorphismengruppen, Math. Z. **73** (1960); 235—253. [61:10, 200] (Д. 34.3)

[3] Eine Charakterisierung gewisser abelscher $p$-Gruppen, Arch. Math. **13** (1962), 82—85. [63:5, 192] (Д. 30.2)

[4] Einige Bemerkungen über die Automorphismen abelscher $p$-Gruppen, Proc. Colloq. on Abel. groups 1963, Budapest, 1964, 99—104. [66:1, 211] (Д. 34.3).

Лернер (Learner A.)

[1] The embedding of a class of polycyclic groups, Proc. London Math. Soc. **12** (1962), 496—510. [63:5, 197] (Д. 24.3)

[2] Residual properties of polycyclic groups, Ill. J. Math. **8** (1964), 536—542. [65:9, 192] (Д. 24.3)

Либек (Liebeck H.)

[1] Concerning nilpotent wreath products, Proc. Cambridge Phil. Soc. **58** (1962), 443—451. [63:5, 208] (Д. 12.4)

[2] Concerning automorphisms in finitely generated abelian groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **59** (1963), 25—31. [64:8, 164] (Д. 34.3)

[3] Locally inner and almost inner automorphisms, Arch. Math. **15** (1964), 18—27. [64:11, 160] (Д. 3.1)

Ливчак Я. Б.

[1] Локально разрешимая группа, не являющаяся $RN^*$-группой, ДАН СССР **125** (1959), 266—268. [60:4, 3811] (Д. 23.1,

Д. 23.3)

[2] К теории обобщенно-разрешимых групп, Сиб. матем. ж. **1** (1960), 617—622. [61:8, 187] (Д. 23.1)

Лившиц А. Х.

[1] О теореме Жордана — Гёльдера в структурах, Матем. сб. **24** (1949), 227—235. (44)

[2] К теории прямых разложений групп, ДАН СССР **64** (1949), 289—292. (42)

[3] Прямые разложения вполне дедекиндовых структур, Матем. сб. **28** (1951), 481—502. (42)

[4] Прямые разложения с неразложимыми слагаемыми в алгебраических категориях, Матем. сб. **51** (1960), 427—458. [61:12, 334] (Д. 5.3)

[5] Прямые разложения в алгебраических категориях, Тр. Моск. матем. о-ва 9(1960), 129—141. [61:12, 335] (Д. 5.3)

[6] Прямые разложения идемпотентов в полугруппах, Тр. Моск. матем. о-ва **11** (1962), 37—98. [64:1, 254] (Д. 5.3)

[7] Теоретико-категорные основы двойственности радикальности и полупростоты, Сиб. матем. ж. **5** (1964), 319—336. [65:3, 344] (Д. 20.1)

Линдон (Lyndon R. C.)

[1] The cohomology theory of group extensions, Duke math. J. **15** (1948), 271—292.

[2] New proof for a theorem of Eilenberg and MacLane, Ann. Math., **50** (1949), 731—735.

[3] Cohomology theory of groups with a single defining relation, Ann. Math. **52** (1950), 650—665.

[4] Two notes on nilpotent groups, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 579—583. (Д. 10.5, Д. 27.2)

[5] On Burnside's problem, Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 202—215. [56:3, 1997] (Д. 16.3)

[6] On Burnside's problem, II, Trans. Amer. Math. Soc. **78**

(1955), 329—332. [56:11, 7894] (Д. 16.3)

[7] The equation $a^2b^2=c^2$ in free groups, Michigan Math. J. **6** (1959), 89—95. [60:1, 150] (Д. 9.1)

[8] Equations in free groups, Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 445—457. [63:2, 193] (Д. 9.5)

[9] Dependence and independence in free groups, J. reine und angew. Math. **210** (1962), 148—174. [63:3, 186] (Д. 15.2)

[10] Length functions in groups, Math. Scand. **12** (1963), 209—234. [65:7, 178] (Д. 7.1)

[11] Grushko's theorem, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 822—826. [66:10, 146] (Д. 7.2)

[12] Dependence in groups, Coll. Math. **14** (1966), 275—283. [66:12, 191] (Д. 9.5)

Линдон и Шютценбергер (Lyndon R. C, Schützenberger M. P.)

[1] The equation $a^M=b^Nc^P$ in a free group, Mich. Math. J. **9** (1962), 289—298. [63:11, 160] (Д. 9.1)

Липшуц (Lipschutz S.)

[1] Elements in $S$-groups with trivial centralizers, Comm. pure and appl. Math. **13** (1960), 679—683. [62:6, 168] (Д. 15.4)

[2] On powers of elements in $S$-groups, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 181—186. [63:3, 185] (Д. 15.4)

[3] On square roots in eighth-groups, Comm. pure and appl. Math. **15** (1962), 39—43. [64:1, 234] (Д. 15.4)

[4] An extension of Greendlinger's result on the word problem, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 37—43. [65:6, 160) [Д. 15.4)

Лихтман А. И.

[1] О нильпотентно-аппроксимируемых группах, Сиб. матем. ж. **6** (1965), 862—866. [66:7, 197] (Д. 25.5)

Лишак М. Г.

[1] Ω-группы с идеализаторным условием. Изв. АН Каз. ССР, сер. физ.-мат. наук, вып. **2** (1964), 63—68. [65:3, 360] (Д. 25.3)

[2] Метабелевы и слабо метабелевы Ω-группы; идеализаторное условие. Вестн. АН Каз. ССР **10** (1964), 75—79. [65:4, 246] (Д. 25.3)

[3] О периодической части абелевой Ω-группы, Тр. 1-й Казахст. межвуз. научн. конфер. по матем. и мех., 1963; Алма-Ата, 1965, 140—146. (Д. 28.1)

Лози (Losey G.)

[1] A note on groups of prime power exponent satisfying an Engel congruence, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 209—211. [64:11, 172] (Д. 16.4)

Лойко Н. В.

[1] $S$-изоморфизм абелевых групп без кручения, Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1961), 67—71. [62:7, 161] (Д. 14.6)

[2] $S$-изоморфизмы смешанных абелевых групп ранга $r \geqslant 2$, Матем. зап. Уральск. ун-та **4** (1963), 57—59. [63:11, 158] (Д. 14.6)

[3] $S$-изоморфизмы смешанных абелевых групп ранга $r=1$, Сиб. матем. журн. **6** (1965), 1053—1067. [66:2, 225] (Д. 14.6)

[4] Естественные $S$-изоморфизмы групп без кручения, Матем. зап., Красноярск. пед. ин-т, кафедра алгебры, вып. 1, 1965, 46—53. (Д. 14.6)

Лонстра (Loonstra F.)

[1] Sur les extensions du groupe additif des entiers rationnels par le meme groupe, Proc. Nederl. akad. **A57** (1954), 263—272. [56:10, 7146] (Д. 12.1)

[2] Homomorphe Abbildungen von Gruppenerweiterungen, Proc. Nederl. akad. **A60** (1957), 44—54. [57:10, 7659] (Д. 12.1)

[3] Erweiterungen von Grenzgruppen, Proc. Nederl. akad. **A60** (1957), 548—559. [59:3, 2359] (Д. 12.1)

[4] Fortsetzung von Gruppenhomomorphismen, J. reine und angew. Math. **199** (1958), 192—202. [59:8, 7790] (Д. 12.1)

[5] Klassifikation der Darstellungen einer Gruppe, Acta Math. Hung. **11** (1960), 223—229. [62:3, 203] (Д. 2.1, Д. 12.2)

[6] Darstellungen von Gruppen als homomorphes Bild, Math. Z. **76** (1961), 149—154. [62:3, 204] (Д. 2.1)

[7] Homomorphe Abbildungen in einer Gruppe, Ann. mat. pura ed appl. **55** (1961). 159—169. [63:5, 162] (Д. 2.1)

[8] Das System aller Erweiterungen einer Gruppe, Arch. Math. **12** (1961), 262—279. [62:12, 138] (Д. 12.2)

[9] Extensions de deux suites exactes, Ann. mat. pura ed appl. **56** (1961), 329—343. [63:3, 171] (Д. 12.1)

[10] Über subdirekte Produkte von Gruppen, Rend. mat. e appl. **21** (1962), 364—372. [64:1, 235] (Д. 6.2)

Лоренц А. А.

[1] Бескоэффициентные уравнения в свободных группах, ДАН СССР **160** (1965), 538—540. [65:6, 159] (Д. 9.5)

Лоренцен (Lorenzen P.)

[1] Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik, Math. Z. **49** (1944), 313—327. (3a, Д. 1.1)

[2] Eine Bemerkung zum Schreierschen Verfeinerungssatz, Math. Z. **49** (1944), 647—653.

Лось (Łoś J.)

[1] On the complete direct sum of countable abelian groups, Publ. Math. **3** (1954), 269—272. [56:12, 8607] (Д. 31.5)

[2] On the torsion-free abelian groups with hereditarily generating sequences, Бюлл. Польской АН **4** (1956), 165—167. [57:8, 6164] (Д. 28.6)

[3] Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as pure subgroups, Fund. Math. **44** (1957), 84—90. [59:4, 3535] (Д. 29.5)

[4] Linear equations and pure subgroups, Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 13—18. [61:5, 215] (Д. 29.3)

[5] Generalized limits in algebraically compact groups, Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 19—21. [61:3, 197] (Д. 29.5)

Лось, Сонсяда и Сломиньский (Łoś J., Sasiada E., Słomiński Z.)

[1] On abelian groups with hereditarily generating systems, Publ. Math. **4** (1956), 351—356. [60:2, 1374] (Д. 28.6)

Лохер (Locher L.)

[1] Die Untergruppen der freien Gruppen, Comment. math. helv. **6** (1933), 76—82. (36)

Льюис (Lewis P. E.)

[1] Characters of abelian groups, Amer. J. Math. **64** (1942), 81—105.

Любельский (Lubelski S.)

[1] Zur Verschärfung des Jordan-Hölderschen Satzes, Матем. сб. **9** (1941), 277—280.

Лю Шао-сюэ

[1] О прямых слагаемых в группах с мультиоператорами, Scientia Sinica **13** (1964), 1735—1745. [65:8, 262] (Д. 5.1)

Ляпин Е. С.

[1] Über die Ordnung der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe, Матем. сб. **1** (1936), 887—905. (12)

[2] О разложении абелевых групп без кручения, имеющих конечный ранг, в прямую сумму групп первого ранга, Матем. сб. **3** (1938), 167—177.

[3] О разложении абелевых групп в прямые суммы групп первого ранга, Изв. АН СССР, сер. матем. 1939, № 2, 141—148. (29)

[4] Некоторые свойства разложений абелевых групп без круче-

ния в прямые суммы. ДАН СССР **24** (1939), 8—10.

[5] Разложение исчислимых абелевых групп без кручения в прямые суммы групп первого ранга, ДАН СССР **24** (1939), 11—13.

[6] О разложенн абелевых групп в прямые суммы рациональных групп, Матем. сб. **8** (1940), 205—237. (31)

[7] Полные действия в классах ассоциативных систем и групп, Уч. зап. Пед. ин-та им. Герцена, Ленинград, **86** (1949), 93—106. (62, Д. 11.7)

Ляховицкий В. Н.

[1] К вопросу о разложимости группы в разноименные нильпотентные произведения, Матем. сб. **40** (1956), 401—414. [59:3, 2371] (Д. 11.5)

Магнус (Magnus W.)

[1] Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz), J. reine angew. Math. **163** (1930), 141—165. (41, Заключение к 1-му изд.)

[2] Untersuchungen über einige unendliche diskontinuierliche Gruppen, Math. Ann. **105** (1931), 52—74.

[3] Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation, Math. Ann. **106** (1932), 295—307. (41)

[4] Über $n$-dimensionale Gittertransformationen, Acta math. **64** (1935), 353—367.

[5] Über den Beweis des Hauptidealsatzes, J. reine angew. Math. **170** (1934), 235—240.

[6] Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Ann. **111** (1935), 259—280. (36, 39, Заключение к 1-му изд.)

[7] Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, J. reine angew. Math. **177** (1937), 105—115.

[8] Neuere Ergebnisse über auflösbare Gruppen, Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **47** (1937), 69—78.

[9] Über freie Faktorgruppen und freie Untergruppen gegebener Gruppen, Monatsh. Math. Phys. **47** (1939), 307—313. (Заключение к 1-му изд.)

[10] On a theorem of Marshall Hall, Ann. Math. **40** (1939), 764—768.

[11] Allgemeine Gruppentheorie, Enzyklopädie der math. Wiss., 2. Aufl. 1939.

[12] Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe, J. reine angew. Math. **182** (1940), 142—149. (Д. 16.4)

[13] A connection between the Baker-Hausdorff formula and a problem of Burnside, Ann. Math. **52** (1950), 111—126. (Д. 16.3)

Магнус, Каррас и Солитэр (Magnus W., Karrass A., Solitar D.)

[1] Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations, New York, London, Sydney, 1966. (Д. 7.1)

Макбет (Macbeath A. M.)

[1] Packings, free products and residually finite groups, Proc. Cambridge Phil. Soc. **59** (1963), 555—558. [64:2, 254] (Д. 17.9)

Макгенри (MacHenry T.)

[1] The tensor product and the 2nd nilpotent product of groups, Math. Z. **73** (1960), 134—145. [61:12, 263] (Д. 11.5)

[2] The tensor product of non-abelian groups and exact sequences, Arch. Math. **11** (1960), 166—170. [61:12, 264] (Д. 9.2, Д. 11.5)

Макдональд (Macdonald I. D.)

[1] A class of *FC*-groups, J. London Math. Soc. **34** (1959), 73—80. [60:6, 6201] (Д. 17.6, Д. 17.7)

[2] On certain varieties of groups, Math. Z. **76** (1961), 270—282; **78** (1962), 175—188. [62:3, 182; 62:8, 146]

(Д. 24.4, Д. 24.6)

[3] On a set of normal subgroups, Proc. Glasgow Math. Assoc. **5** (1962), 137—146. [62:10, 150] (Д. 25.4)

[4] On central series, Proc. Edinburgh Math. Soc. **13** (1962), 175—178. [63:11, 138] (Д. 3.3)

[5] Another law for the 3-metabelian groups, J. Austral. Math. Soc. **4** (1964), 452—453. [65:12, 222] (Д. 24.4)

[6] Some metabelian-like varieties, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 159—162. (Д. 24.6)

Маклейн Д. (**McLain D. H.**)

[1] A characteristically-simple group, Porc. Cambridge Phil. Soc. **50** (1954), 641—642. [56:1, 224] (Д. 3.2, Д. 25.1)

[2] On locally nilpotent groups, Proc. Cambridge Phil. Soc. **52** (1956), 5—11. [56:12, 8613] (Д. 25.1, Д. 27.4, Д. 27.5)

[3] Remarks on the upper central series of a group, Proc. Glasgow Math. Assoc. **3** (1956), 38—44. [57:11, 8452] (Д. 3.3, Д. 17.3, Д. 17.6, Д. 25.6)

[4] Finiteness conditions in locally soluble groups, J. London Math. Soc. **34** (1959), 101—107. [60:2, 1383] (Д. 23.2, Д. 23.4)

Маклейн С. (**MacLane S.**)

[1] Cohomology theory in abstract groups. III, Ann. Math. **50** (1949), 736—761. (50)

[2] Duality for groups, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 485—516. (Д. 28.4)

[3] A proof of the subgroup theorem for free products, Mathematika **5** (1958), 13—19. [59:6, 5579] (Д. 7.1)

[4] Group extensions by primary abelian groups, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 1—16. [61:4, 186] (Д. 33.2)

[5] Homology, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1963.

(Русский перевод: Гомология, Изд. «Мир», 1966) (Д. 12.1)

Маланьина Г. А.

[1] Полупрямые произведения циклических групп, ДАН СССР **132** (1960), 762—765. [61:4, 177] (Д. 13.1)

[2] Полупрямые произведения циклических $p$-групп, Уч. зап. Пермск. ун-та **17** (1960), 33—67. [62:3, 190] (Д. 13.1)

[3] К вопросу о полупрямом произведении, Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 27—30. [63:8, 154] (Д. 13.1)

[4] О полупрямом произведении двух циклических $p$-групп ($p\neq 2$), Уч. зап. Пермск. ун-та **103** (1963), 43—45. [65:1, 179] (Д. 13.1)

Мальцев А. И.

[1] Абелевы группы конечного ранга без кручения, Матем. сб. **4** (1938), 45—68. (32б, Д. 31.1)

[2] Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами, Матем. сб. **8** (1940), 405—422. (36, 64, Заключение к 1-му изд-, Д. 17.9)

[3] Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп, Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, физ.-мат. фак., **1** (1941), 3—9. (55, 58, 63)

[4] О группах конечного ранга, Матем. сб. **22** (1948), 351—352. (37а, 53)

[5] Об одном классе однородных пространств, Изв. АН СССР, сер. матем., **13** (1949), 9—32. (67)

[6] Нильпотентные группы без кручения, Изв. АН СССР, сер. матем., **13** (1949), 201—212. (63, 66, 67)

[7] Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы, Матем. сб. **25** (1949), 347—366. (14, 36, 64, Д. 17.9, Д. 23.1, Д. 25.5, Д. 25.6)

[8] О бесконечных разрешимых группах, ДАН СССР **67** (1949), 23—25.

[9] Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями, Матем. сб. **26** (1950), 19—33. (37, 62)

[10] О некоторых классах бесконечных разрешимых групп, Матем. сб. **28** (1951), 567—588. (59, 64, Д. 24. 1, Д. 24.2, Д. 25.1)

[11] Два замечания о нильпотентных группах, Матем. сб. **37** (1955)) 567—572. [57:1, 146] (Д. 27.2, Д. 27.3)

[12] О гомоморфизмах на конечные группы, Уч. заг. Ивановск. пед. ин-та **18** (1958), 49—60. [60:5, 4941] (Д. 17.9)

[13] О свободных разрешимых группах, ДАН СССР **130** (1960), 495—498. [61:3, 191] (Д. 24.5)

[14] Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1}=aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе, Алгебра и логика (семинар) **1**, № 5 (1962), 45—50. [63:9, 164] (Д. 9.3)

Маркьонна-Тибилетти (Marchionna-Tibiletti C.)

[1] Immersione in prodotti completi di prodotti ordinati die più gruppi, Ann. mat. pura ed appl. **44** (1957), 233—244. [59:4, 3543] (Д. 13.2)

[2] Una scomposizione del prodotto sghembo di Rédei, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino **17** (1957—1958), 209—221. [63:1, 201] (Д. 13.3)

[3] Una scomposizione di un piu generale prodotto sghembo di gruppi, Univ. e Polit. Torino Rend. Sem. Mat. **18** (1958—1959), 77—89. [63:3, 188] (Д. 13.3)

[4] Ampliamenti di automorfismi in prodotti di gruppi permutabili, Boll. Un. mat. ital. **16** (1961), 449—464. [63:3, 189] (Д. 13.2)

Маурер (Maurer I.)

[1] Contributii la studiul grupărilor pe baza cvasicentrului, Comun. Acad. RPR **5** (1955), 1029—1034. [56:10, 7149] (Д. 3.3)

Мацедонская О. Н.

[1] О нейтральных поливербальных операциях, Матем. сб. **69** (1966), 286—299. [67:3, 136] (Д. 11.6)

Мегиббен (Megibben Ch. K.)

[1] A note on a paper of Bernard Charles, Bull. Soc. Math. France **91** (1963), 453—454. [64:12, 169] (Д. 29.2)

[2] On high subgroups, Pacif. J. Math. **14** (1964), 1353—1358. [65:11, 109] (Д. 29.4, Д. 29.5)

[3] Kernels of purity in abelian groups, Publ. Math. **11** (1964), 160—164. [66:10, 135] (Д. 29.3)

[4] On subgroups of primary abelian groups, Publ. Math. **12** (1965), 293—294. [66:10, 139] (Д. 29.2)

Мейер-Вундерли (Meier-Wunderli H.)

[1] Über endliche $p$-Gruppen, deren Elemente der Gleichung $x^p=1$ genügen, Comm. math. Helv. **24** (1950), 18—45.

[2] Über die Struktur der Burnsidegruppen mit zwei Erzeugenden und vom Primzahlexponenten $p>3$, Comm. math. Helv. **30** (1956), 144—160. [57:7, 5360] (Д. 16.3)

Мерзляков Ю. И.

[1] К теории обобщенных разрешимых и обобщенных нильпотентных групп, Алгебра и логика (семинар) **2**, № 5 (1963), 29—36. [64:7, 217] (Д. 23.1, Д. 25.7)

[2] О локально разрешимых группах конечного ранга, Алгебра и логика (семинар) **3**, № 2 (1964), 5—16. [65:3, 190] (Д. 23.1, Д. 23.2, Д. 25.1)

Милс (Mills W. H.)

[1] Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 379—392.

[2] On the non-isomorphism of certain holomorphs, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 428—443. [54:1, 1571] (Д. 3.2)

[3] Decomposition of holomorphs, Pacif. J. Math. **11** (1961). 1443—1446. [63:2, 194] (Д. 3.2)

Митра (Mitra A.)

[1] A theorem on Engel groups, J. Indian Math. Soc. **25** (1961), 155—161. [63:9, 153] (Д. 26.2)

Михайлова К. А.

[1] Проблема вхождения для прямых произведений групп, ДАН СССР **119** (1958), 1103—1105. [59:1, 79] (Д. 15.4)

[2] Проблема вхождения для свободных произведений групп, ДАН СССР **127** (1959), 746—748. [60:3, 2668] (Д. 15.4)

Мишина А. П.

[1] О полных прямых суммах абелевых групп без кручения первого ранга, Укр. матем. ж. **2**, № 4 (1950), 64—70. (32, Д. 31.5)

[2] Некоторые условия расщепления смешанных абелевых групп, Укр. матем. ж. **3** (1951), 218—232. (29, Д. 32.2)

[3] Об изоморфизме полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1, Матем. сб. **31** (1952), 118—127. (Д. 31.5)

[4] О прямых слагаемых полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 244—249. [62:11, 136] (Д. 31.5, Д. 31.6)

[5] Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1, Матем. сб. **57** (1962), 375—383. [62:12, 143] (Д. 31.5)

[6] Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп, Вестн. МГУ, Матем., мех., 1962, № 4, 39—43. [63:2, 183] (Д. 34.1)

Моран (Moran S.)

[1] Associative operations on groups, I, Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 581—596. [59:3, 2369] (Д. 11.4)

[2] Associative operations on groups, II, Proc. London Math. Soc. **8** (1958), 548—568. [60:9, 10029] (Д. 11.4)

[3] Duals of a verbal subgroup, J. London Math. Soc. **33**

(1958), 220—236; **34** (1959), 250. [60:9, 10025, 10026] (Д. 3.4)

[4] The homomorphic image of the intersection of a verbal subgroup and the cartesian subgroup of a free product, J. London Math. Soc. **33** (1958), 237—245; **34** (1959), 250. [60:9, 10027] (Д. 3.4)

[5] Further duals of a verbal subgroup, Proc. Glasgow Math. Assoc. **4** (1959), 88—91. [61:9, 222] (Д. 3.4)

[6] Associative operations on groups, III, Proc. London Math. Soc. **9** (1959), 287—317. [61:9, 224] (Д. 11.7)

[7] Associative regular operations on groups corresponding to a property $P$, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 796—799. [61:9, 226] (Д. 11.7)

[8] Unrestricted verbal products, J. London Math. Soc. **36** (1961), 1—23. [62:3, 194] (Д. 7.4, Д. 11.8)

[9] Properties of $N$-multiplications and $N^*$-multiplications, J. London Math. Soc. **36** (1961), 193—210. [62:2, 205] (Д. 11.7)

[10] Note on a question of Malcev, Bull. Acad. Polon. **9** (1961), 853—855. [63:4, 153] (Д. 11.3)

[11] Unrestricted nilpotent products, Acta Math. **108** (1962), 61—88. [63:11, 173] (Д. 11.8)

[12] A subgroup theorem for free nilpotent groups, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 495—515; **112** (1964), 79—83. [63:5, 199; 65:2, 275] (Д. 27.3)

Моримото (Morimoto A.)

[1] A lemma on a free group, Nagoya Math. J. **7** (1954), 149—150. [56:2, 1083] (Д. 1.1)

Мостовский (Mostowski A. W.)

[1] Nilpotent free groups, Fund. Math. **49** (1961), 259—269. [62:1, 206] (Д. 27.3)

[2] On automorphisms of relatively free groups, Fund.

Math. **50** (1962), 403—411. [62:11, 147] (Д. 27.3)

Мостовский и Сонсяда (Mostowski A. W., Sasiada E.)

[1] On the bases of modules over a principal ideal ring, Bull. Acad. Polon. **3** (1955), 473—474. [56:12, 8644] (Д. 28.2)

Мохамед (Mohamed I. J.)

[1] On series of subgroups related to groups of automorphisms, Proc. London Math. Soc. **13** (1963), 711—723. [64:5, 141) (Д. 22.4)

[2] On the class of the stability group of a subgroup chain, J. London Math. Soc. **39** (1964), 109—114. [64:12, 171] (Д. 22.4)

Мочульский Е. Н.

[1] Прямые разложения дедекиндовых структур, Матем. сб. **37** (1955), 89—102. [57:8, 6202] (Д. 5.3)

[2] Прямые разложения в структурах, Изв. АН СССР, сер. матем., **25** (1961) 717—748; **26** (1962), 161—210. [62:7, 225; 64:2, 346] (Д. 5.3)

Мурасуги (Murasugi K.)

[1] The center of a group with a single defining relation, Math. Ann. **155** (1964), 246—251. [65:1, 183] (Д. 15.2)

Мурата (Murata K.)

[1] A subdirect representation of a group, J. Inst. Polyt. Osaka City Univ. **A11** (1960), 11—14. [62:2, 198] (Д. 20.6)

Мухаммеджан Х. Х.

[1] К теории бесконечных групп, обладающих возрастающим центральным рядом, ДАН СССР **65** (1949), 269—272. (Д. 25.4)

[2] О группах с возрастающим центральным рядом, Матем. сб. **28** (1951), 185—196. (64, 65)

[3] О группах, обладающих разрешимым возрастющим инва

риантным рядом, Матем. сб. **39** (1956), 201—218. [57:5, 3802] (Д. 23.4, Д. 25.4)

Мышкин В. И.

[1] Однородные сепарабельные абелевы группы без кручения, Матем. сб. 64 (1964), 3—9. [65:5, 172] (Д. 31.7)

[2] Про один клас нерозщеплюваних змішаних абелевих груп, ДАН УРСР, 1964, № 12, 1572—1574. [65:5, 173] (Д. 31.7)

[3] Про зчисленні абелеві групи рангу 1, ДАН УРСР, 1965, №8, 974—977. [66:1, 217] (Д. 32.3)

Мягкова Н. Н.

[1] О группах конечного ранга, Изв. АН СССР, сер. матем. **13** (1949), 495—512. (64, Д. 25.1, Д. 25.2)

Нагао (Nagao H.)

[1] Über die Beziehungen zwischen dem Erweiterungssatz von O. Schreier und dem von K. Shoda, Proc. Japan Acad. **21** (1945), 359—362. (Д. 12.1)

Нагата (Nagata M.)

[1] Note on groups with involutions, Proc. Japan. Acad. **28** (1952), 564—566. (Д. 3.1)

Нейман Б. (Neumann B. H.)

[1] Die Automorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. **107** (1932), 367—386. (35)

[2] Über ein gruppentheoretisch-arithmetisches Problem, S.-B. Preuss. Akad. (1933), 429—444.

[3] Decomposition of groups, J. London Math. Soc. **10** (1935), 3—6. (38, Заключение к 1-му изд., (Д. 13.2, Д. 16.2)

[4] Identical relations in groups, I, Math. Ann. **114** (1937), 506—525. (37, Д. 3.4, Д. 10.3, Д. 10.5)

[5] Some remarks on infinite groups, J. London Math. Soc. **12** (1937), 120—127 (38, 62)

[6] Groups whose elements have bounded orders, J. London Math. Soc. **12** (1937), 195—198.

[7] Adjunction of elements to groups, J. London Math. Soc. **18** (1943), 4—11. (67, Д. 19.5)

[8] On the number of generators of a free product, J. London Math. Soc. **18** (1943), 12—20. (39)

[9] A two-generator group isomorphic to a proper factor group, J. London Math. Soc. **25** (1950), 247—248. (38)

[10] On a special class of infinite groups, Nieuw Archief voor Wiskunde **23** (1950), 117—127.

[11] On the commutativity of addition, J. London Math. Soc. **15** (1940), 203—208. (Д. 3.1)

[12] Groups with finite classes of conjugate elements, Proc. London Math. Soc. **1** (1951), 178—187. (Д. 17.6)

[13] A note on algebraically closed groups, J. London Math. Soc. **27** (1952), 247—249. (Д. 19.5)

[14] On a problem of Hopf, J. London Math. Soc. **28** (1953), 351—535. [54:10, 5068] (Д. 15.1)

[15] An essay on free products of groups with amalgamations, Phil. Trans. Roy. Soc., London, **A246** (1954), 503—554. [55:9, 4259] (Д. 8.1, Д. 8.2)

[16] Groups covered by permutable subsets, J. London Math. Soc. **29** (1954), 236—248. [55:3, 1112] (Д. 17.7, Д. 19.6)

[17] Groups covered by finitely many cosets, Publ. Math. **3** (1954), 227—242. [57:2, 1169] (Д. 19.6)

[18] Groups with finite classes of conjugate subgroups, Math. Z. **63** (1955), 76—96. [56:7, 5116] (Д. 17.7)

[19] Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed, Arch. Math. **7** (1956), 1—5. [57:1, 148] (Д. 3.1)

[20] On a question of Gaschütz, Arch. Math. **7** (1956), 87—90. [57:1, 133] (Д. 3.4)

[21] On a conjecture of Hanna Neumann, Proc. Glasgow Math. Assoc. **3** (1956), 13—17. [57:7, 5358] (Д. 24. 4)

[22] Ascending derived series, Comp. Math. **13** (1956), 47—64; **18** (1957), 128. [57:10, 7660; 58:10, 8590] (Д. 12. 3, Д. 23. 5)

[23] Ascending verbal and Frattini series, Math. Z. **69** (1958), 164—172. [59:1, 143] (Д. 23. 5, Д. 27. 4)

[24] Isomorphism of Sylow subgroups of infinite groups, Math. Scand. **6** (1958), 299—307. [60:9, 10021] (Д. 18. 1)

[25] On amalgams of periodic groups, Proc. Roy. Soc. **A255** (1960), 477—489. [61:6, 203] (Д. 8. 2)

[26] Permutational products of groups, J. Austral. Math. Soc. **1** (1960), 299—310. [62:2, 206] (Д. 8. 2)

[27] On a theorem of Auslander and Lyndon, Arch. Math. **13** (1962), 4—9. [63:9, 163] (Д. 9. 2)

[28] Twisted wreath products of groups, Arch. Math. **14** (1963), 1—6. [63:11, 179] (Д. 12. 3)

[29] Supplements of direct powers in cartesian powers, Math. Z. **87** (1965), 17—18. [65:7, 182] (Д. 6. 1)

Нейман Б. и Нейман Х. (Neumann B. H. and Neumann H.)

[1] A remark on generalized free products, J. London Math. Soc. **25** (1950), 202—204. (Д. 8. 1)

[2] Zwei Klassen charakteristischer Untergruppen und ihre Faktorgruppen, Math. Nachr. **4** (1951), 106—125. (Д. 3. 4)

[3] Extending partial endomorphisms of groups, Proc. London Math. Soc. **2** (1952), 337—348. (Д. 3. 5)

[4] A contribution to the embedding theory of group amalgams, Proc. London Math. Soc. **3** (1953), 243—256. [54:2, 2003] (Д. 8. 2)

[5] On a class of abelian groups, Arch. Math. **4** (1953),

79—85. [54:4, 2869] (Д. 28.3)

[6] Partial endomorphisms of finite groups, J. London Math. Soc. **29** (1954), 434—440. [56:1, 213] (Д. 3.5)

[7] Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc. **34** (1959), 465—479. [60:11, 12519] (Д. 15.1)

[8] On linked products of groups, Acta Sci. Math. **21** (1960), 197—205. [62:2, 207] (Д. 13.6)

Нейман Б., Нейман Х. и Нейман П. (Neumann B. H., Neumann H., Neumann P. M.)

[1] Wreath products and varieties of groups, Math. Z. **80** (1962), 44—62. [63:8, 160] (Д. 10.4, Д. 10.6, Д. 12.3)

Нейман Б. и Уайголд (Neumann B. H., Wiegold J.)

[1] On certain embeddability criteria for group amalgams, Publ. Math. **9** (1962), 57—64. [64:8, 167] (Д. 8.2, Д. 11.8)

Нейман Х. (Neumann H.)

[1] Generalized free products with amalgamated subgroups, Amer. J. Math. **70** (1948), 590—625; **71** (1949), 491—540. (35, Д. 8.1, Д. 8.2)

[2] Generalized free sums of cyclical groups, Amer. J. Math. **72** (1950), 671—685. (35, Д. 8.2)

[3] On an amalgam of abelian groups, J. London Math. Soc. **26** (1951), 228—232. (35, Д. 8.2)

[4] On varieties of groups and their associated near-rings, Math. Z. **65** (1956), 36—69. [57:1, 147] (Д. 9.4, Д. 10.4)

[5] On the intersection of finitely generated free groups, Publ. Math. **4** (1956), 186—189; **5** (1957), 128. [59:5, 4477, 4478] (Д. 9.1)

Нейман Х. и Уайголд (Neumann H., Wiegold J.)

[1] Linked products and linked embedding of groups, Math. Z. **73** (1960), 1—19. [61:12, 266] (Д. 13.6)

Нейман П. (Neumann P. M.)

[1] Some indecomposable varieties of groups, Quart. J. Math. **14** (1963), 46—50. [63:11, 180] (Д. 10.4, Д. 10.5)

[2] On the structure of standard wreath products of groups, Math. Z. **84** (1964), 343—373. [65:2, 284] (Д. 12.4)

[3] On word subgroups of free groups, Arch. Math. **16** (1965), 6—21. [65:12, 233] (Д. 10.6)

Нейман П. и Уайголд (Neumann P. M., Wiegold J.)

[1] Schreier varieties of groups, Math. Z. **85** (1964), 392—400. [65:7, 180] (Д. 10.6)

Нефедьев Г. Н.

[1] Периодические абелевы расширения группы типа $p^\infty$, Тр. Уральск. политехн. ин-та **51** (1954), 92—106. [55:9, 4255] (Д. 12.1)

Нильсен (Nielsen J.)

[1] Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden, Math. Ann. **78** (1917), 385—397. (35)

[2] Über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation, Math. Ann. **79** (1918), 269—272. (35)

[3] Om Regning med ikke-kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien, Mat. Tidsskrift B, 1921, 77—94. (36, 39)

[4] Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. **91** (1924), 169—209. (35)

[5] A basis for subgroups of free groups, Math. Scand. **3** (1955), 31—43. [56:3, 1999] (Д. 9.1)

Нисневич В. Л.

[1] О группах, изоморфно представимых матрицами над коммутативным полем, Матем. сб. 8 (1940), 395—404. (Заключение к 1-му изд.)

Нишигори (Nishigôri N.)

[1] On some properties of *FC*-groups, J. Hiroshima Univ.

**A21** (1957), 99—105. [59:3, 2360] (Д. 17.6)

[2] On skew products of groups, J. Hiroshima Univ. **A24** (1960), 477—508. [62:4, 182] (Д. 13.3)

[3] On *FC*-solvable groups, J. Hiroshima Univ. **A25** (1961), 367—368. [63:2, 188] (Д. 17.6)

Новиков П. С.

[1] Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества, ДАН СССР **85** (1952), 709—712. (41)

[2] Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп, Изв. АН СССР, сер. матем., **18** (1954), 485—524. [55:6, 2521] (Д. 15.4)

[3] Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, Тр. Матем. ин-та АН СССР **44** (1955), 3—143. [56:1, 112] (Д. 15.4)

[4] О периодических группах, ДАН СССР **127** (1959), 749—752. [60:6, 6197] (Д. 16.2)

Нунке (Nunke R. J.)

[1] On direct products of infinite cyclic groups, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 66—71. [63:6, 182] (Д. 31.6)

[2] Slender groups, Acta Sci. Math. **23** (1962), 67—73. [63:12, 177] (Д. 31.6, Д. 33.3, Д. 33.4)

[3] A note on abelian group extensions, Pacif. J. Math. **12** (1962), 1401—1403. [64:6, 171] (Д. 33.2)

[4] On the structure of Tor, Proc. Coll. on abelian groups, 1963, Budapest, 1964, 115—124. [66:3, 173] (Д. 30.3, Д. 33.8)

Ньюмэн (Newman M. F.)

[1] On a class of metabelian groups, Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 354—364. [62:2, 203] (Д. 24.4)

[2] On a class of nilpotent groups, Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 365—375. [62:2, 204] (Д. 24.4)

[3] On subgroup commutators, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 724—728. [64:4, 188] (Д. 27.1)

Ньюмэн и Уайголд (Newman M. F., Wiegold J.)

[1] Groups with many nilpotent subgroups, Arch. Math. **15** (1964), 241—250. [65:12, 223] (Д. 27.1)

Ньюуайрт (Neuwirth L.)

[1] An alternative proof of a theorem of Iwasawa on free groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **57** (1961), 895—896. [62:3, 192] (Д. 9.2)

Орсатти (Orsatti A.)

[1] Su di un problema di T. Szele e J. Szendrei, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **35** (1965), 171—175. [66:5, 164] (Д. 34.1)

Орэ (Ore O.)

[1] On the foundation of abstract algebra, I, Ann. Math. **36** (1935), 406—437. (44)

[2] On the foundation of abstract algebra, II, Ann. Math. **37** (1936), 265—292. (42)

[3] Direct decompositions, Duke math. J. **2** (1936), 581—596.

[4] Structures and group theory, I, Duke math. J. **3** (1937), 149—174. (Д. 3.3)

[5] On the theorem of Jordan-Hölder, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 266—275. (44)

[6] Structures and group theory, II, Duke math. J. **4** (1938), 247—269. (44)

[7] On the application of structure theory to groups, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 801—806.

[8] A remark on the normal decompositions of groups, Duke math. J. **5** (1939), 172—173.

[9] Contributions to the theory of groups of finite order, Duke math. J. **5** (1939), 431—460. (60)

[10] A remark on groups which are the direct product of their Sylow groups, Monatsh. Math. Phys. **48** (1939), 41—42.

[11] Theory of monomial groups, Trans. Amer. Math. Soc. **51** (1942), 15—64.

[12] Some remarks on commutators, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 307—314.

[13] On coset representatives in groups, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 665—670. [60:2, 1387] (Д. 2.3)

Оутс и Пауэлл (Oates Sh., Powell M. B.)

[1] Identical relations in finite groups, J. of Algebra **1** (1964), 11—39. [65:7, 176] (Д. 10.5)

Охара (Ohara A.)

[1] Note on commutator subgroups of factorisable groups, Proc. Japan Acad. **31** (1955), 612—614. [57:1, 149] (Д. 13.2)

Папп (Papp Z.)

[1] On the closure of the basic subgroup, Publ. Math. 5 (1958), 256—260. (Д. 30.2)

Пейффер (Peiffer R.)

[1] Über Identitäten zwischen Relationen, Mat. Ann. **121** (1949), 67—99.

Пекелпс А. С.

[1] Структурные изоморфизмы групп, обладающих конечным рациональным рядом, УМН **11**, № 4 (1956), 143—147. [57:7, 5363] (Д. 14.4)

[2] Структурные изоморфизмы разрешимых групп с условием максимальности и с условием минимальности, Уч. зап. Уральск. ун-та **19** (1956), 51—59. [59:5, 4475] (Д. 14.4)

[3] О группах с изоморфными структурами подполугрупп, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1957, № 1, 189—194. [60:2, 1392] (Д. 14.6)

[4] Подгрупповая структура некоторых классов групп, Уч. зап. Уральск. ун-та **23** (1960), 30—39. [61:12, 270] (Д. 14.4)

[5] О структурных изоморфизмах разрешимых групп, ДАН СССР **133** (1960), 281—283. [61:6, 214] (Д. 14.4)

[6] Структурные изоморфизмы локально нильпотентных непериодических групп, Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1961), 72—76. [62:9, 148] (Д. 14.4)

[7] Структурные изоморфизмы локально нильпотентных групп без кручения, УМН **18**, № 3 (1963), 187—190. [63:11, 164] (Д. 14.4)

[8] Структурные изоморфизмы смешанных нильпотентных групп, Сиб. матем. ж. **6** (1965), 1315—1321. [66:5, 165] (Д. 14.4)

Пекелис А. С. и Садовский Л. Е.

[1] Проектирования метабелевой группы без кручения, ДАН СССР **151** (1963), 42—44. [64:3, 154] (Д. 14.4)

Переманс (Peremans W.)

[1] Completness of holomorphs, Proc. Nederl. Akad. **A60** (1957), 608—619. [58:9, 7501] (Д. 3.2, Д. 5.1)

Пермутти (Permutti R.)

[1] Distributivita nel reticolo dei sottogruppi normali di un *T*-gruppo, Matematiche **20** (1965), 46—63. [66:3, 175] (Д. 24.4)

Петерсен И.

[1] О построении произведений двух перестановочных групп, Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, **9** (1960), 296—300. [62:2, 208] (Д. 13.2)

Петреску (Petresco J.)

[1] Sur les commutateurs, Math. Z. **61** (1954), 348—356. [56:2, 1079] (Д. 3.3)

[2] Sur les groupes libres, Bull. sci. math. **80** (1956), 6—32. [57:4, 2917] (Д. 9.1)

[3] Sur le théorème de Kuroš dans les produits libres, Ann. Ecole norm. supér. **75** (1958), 107—123. [60:2, 1390] (Д. 7.1)

Петропавловская Р. В.

[1] Об определяемости группы структурой ее подсистем, Матем. сб. **29** (1951), 63—78. (47б, Д. 14.6)

[2] Ассоциативные системы, структурно изоморфные группе I, II, III, Вестн. ЛГУ, 1956, № 13, 6—25; № 19, 80—99; 1957, № 19, 5—19. [57:6, 4640; 60:4, 3821] (Д. 14.6)

[3] О некотором классе групп, определяющемся структурой своих подполугрупп, Матем. сб. **66** (1965), 265—271. [65:8, 162] (Д. 14.6)

Пик (Pic Gh.)

[1] Despre quasi-centrul unui grup, Studii și Cerc. mat. **4** (1953), 7—21. [54:5, 3239] (Д. 3.3)

[2] Sur le quasi-centré d'un groupe, II, Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR **1** (1957), 467—472. [61:4, 178] (Д. 3.3)

[3] Despre o teoremă a lui B. H. Neumann, Studia Univ. Babeș — Bolyai, 1960, № 1, 21—26. [62:11, 143] (Д. 17.6)

[4] O proprietate a grupurilor *FC*-nilpotente, Comun. Acad. RPR **12** (1962), 969—972. [63:6, 185] (Д. 17.6)

Пикар (Piccard S.)

[1] Structure des groupes libres, Ann. Ecole norm. **76** (1959), 1—58. [60:9, 10023] (Д. 9.3)

[2] Les éléments libres des groupes libres, C. R. Paris **251** (1960), 1328—1330. [61:6, 207] (Д. 9.3)

[3] Les groupes quasi libres, C. R. Paris **251** (1960), 2271—2274. [62:1, 213] (Д. 9.6)

[4] Les groupes pseudo-libres et les groupes fondamentaux, C. R. Paris **259** (1964), 24—26. [65:6, 162] (Д. 9.6)

Пикерт (Pickert G.)

[1] Remaksche Zerlegungen für Gruppen mit Paarungen, Math. Z. **53** (1951), 456—462.

Пирс (Pierce R. S.)

[1] Centers of purity in abelian groups, Pacif. J. Math. **13** (1963), 215—219. [64:6, 169] (Д. 29.4)

[2] Endomorphism rings of primary abelian groups, Proc. Colloq. on abelian groups, 1963, Budapest, 1964, 125—137. [66:2, 226] (Д. 34.1)

Плоткин Б. И.

[1] К теории некоммутативных групп без кручения, ДАН СССР **73** (1950), 655—657. (66, 67)

[2] К теории локально нильпотентных групп, ДАН СССР **76** (1951), 639—641. (63)

[3] К теории некоммутативных групп без кручения, Матем. сб. **30** (1952), 197—212. (66, 67, Д. 25.2)

[4] О нильгруппах, ДАН СССР **94** (1954), 999—1001. [54:11, 5458] (Д. 26.1, Д. 26.2)

[5] О некоторых признаках локально нильпотентных групп, УМН **9**, № 3 (1954), 181—186. [56:2, 1069] (Д. 20.6, Д. 25.3, Д. 26.2)

[6] К теории разрешимых групп с условиями конечности, ДАН СССР **100** (1955), 417—420. [56:2, 1075] (Д. 23.3)

[7] К теории разрешимых групп без кручения, Матем. сб. **36** (1955), 31—38. [56:5, 3677] (Д. 23.2)

[8] Радикальные группы, Матем. сб. **37** (1955), 507—526. [56:12, 8614] (Д. 16.7, Д. 20.4, Д. 26.3)

[9] Некоторые вопросы теории групп без кручения, Укр. матем. ж. **8** (1956), 325—329. [57:5, 3801] (Д. 14.4)

[10] Радикальные и полупростые группы, Тр. Моск. Матем. о-ва **6** (1957), 299—336. [60:5, 4946] (Д. 2.5, Д. 14.4, Д. 20.4, Д. 23.3, Д. 24.1, Д. 24.7)

[11] О некоторых классах бесконечных групп, УМН **13**, № 1, (1958), 189—192. [58:11, 9563] (Д. 24.7)

[12] Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы, УМН **13**, № 4 (1958), 89—172. [59:7, 6652] (Д. 14.1, Д. 20.4, Д. 20.6, Д. 21.1, Д. 21.2, Д. 21.4, Д. 22.5, Д. 23.1, Д. 25.1. Д. 25.2, Д. 26.2, Д. 26.6)

[13] Радикал и нильэлементы в группах, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1958, № 1, 130—135. [59:4, 3545] (Д. 26.3)

[14] Абстрактные силовские свойства, Тр. Уральск. электромех. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 2, 7—14. [62:6, 161] (Д. 18.2, Д. 21.2)

[15] Радикальные группы, у которых радикал обладает возрастающим центральным рядом, Уч. зап. Уральск. ун-та **23**, № 2, (1960), 40—43. [61:4, 179] (Д. 23.3)

[16] Об алгебраических элементах в абстрактных группах, Уч. зап. Уральск. ун-та **23**, № 2, (1960), 44—48. [61:6, 216] (Д. 26.6)

[17] Нормальные делители, ограничивающие группу, Матем. сб. **53** (1961), 343—352. [61:12, 275] (Д. 20.6)

[18] Локально стабильные группы автоморфизмов, Сиб. матем. ж. **2** (1961), 100—114. [61:12, 271] (Д. 22.3, Д. 22.5)

[19] Некоторые свойства автоморфизмов нильпотентных групп, ДАН СССР **137** (1961), 1303—1306. [62:1, 211] (Д. 25.1)

[20] Радикалы в групповых парах, ДАН СССР **140** (1961), 1019—1022. [62:8, 147] (Д. 22.5)

[21] Äussere lokale Eigenschaften von Automorphismengruppen, Arch. Math. **13** (1962), 401—407. [65:7, 172] (Д. 22.2)

[22] О некоторых радикалах групп автоморфизмов, УМН **17**, № 4 (1962), 165—171. [63:3, 183] (Д. 22.5)

[23] Радикалы, связанные с представлениями групп, ДАН СССР

**144** (1962), 52—55. [63:3, 182] (Д. 22.5)

[24] Некоторые заемчания о групповых парах, Матем. зап. Уральск. ун-та **4**, № 1 (1963), 63—69. [63:9, 146] (Д. 22.2)

[25] Обобщенные стабильные и обобщенные нильпотентные группы автоморфизмов, Сиб. матем. ж. **4** (1963), 1389—1403. [64:7, 219] (Д. 22.2, Д. 22.3, Д. 22.5)

[26] Одна теорема о локально нильпотентных группах автоморфизмов, Сб. памяти Н. Г. Чеботарева, Казань, 1964, 67—74. [65:5, 177] (Д. 22.2)

Плоткин Б. И. и Вилящер В. Г.

[1] К теории локально стабильных групп автоморфизмов, ДАН СССР **134** (1960), 529—532. [61:6, 211] (Д. 22.3)

Плоткин Б. И. и Кемхадзе Ш. С.

[1] Об одной схеме построения радикалов в группах, Сиб. матем. ж. **6** (1965), 1197—1201. [66:2, 230] (Д. 20.6, Д. 26.6)

Половицкий Я. Д.

[1] Одно условие абелевости группы, Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 41—42. [63:7, 148] (Д. 1.1)

[2] Слойно экстремальные группы, Матем. сб. **56** (1962), 95—106. [62:11, 135] (Д. 17.4)

[3] О локально экстремальных и слойно экстремальных группах, Матем. сб. **58** (1962), 685—694. [63:5, 184] (Д. 17.4)

[4] О группах с условием π-максимальности для подгрупп, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 582—590. [63:1, 179] (Д. 17.4)

[5] Группы с экстремальными классами сопряженных элементов, Сиб. матем. ж. **5** (1964), 891—895. [65:3, 183] (Д. 17.6)

Понтрягин Л. С.

[1] The theory of topological commutative groups, Ann. Math. **35** (1934), 361—388. (32в, Д. 28.2, Д. 33.5)

Попп (Popp G. Ch.)

[1] Beiträge zur Theorie der Zappaschen Produkte, Math. Nachr. **20** (1959), 303—328. [62:2, 200] (Д. 13.2)

Прохазка (Procházka L.)

[1] Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп, Чехосл. матем. ж. **10** (1960), 479—492. [62:4, 172] (Д. 32.2)

[2] К проблеме расщепления некоторых абелевых расширений расщепляемых абелевых групп, Чехосл. матем. ж. **11** (1961), 365—380; **13** (1963), 322—323. [62:5, 199; 64:2, 249] (Д. 32.2)

[3] О расщепляемости факторгрупп абелевых групп без кручения конечного ранга, Чехосл. матем. ж. **11** (1961), 521—557. [63:1, 193] (Д. 31.7)

[4] О $p$-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга, Чехосл. матем. ж. **12** (1962), 3—43. [64:2, 246] (Д. 31.1)

[5] Заметка о факторно-расщепляемых абелевых группах, Časop. pěstov. mat. **87** (1962), 404—414. [64:2, 247] (Д. 31.7)

[6] Заметка о структуре факторгрупп абелевых групп без кручения конечного ранга, Чехосл. матем. ж. **12** (1962), 529—535. [64:2, 248] (Д. 31.7)

[7] Условия разложимости в прямую сумму некоторых абелевых групп без кручения ранга два, Mat.-fyz. časop. **12**, № 3 (1962), 166—202. [64:8, 160] (Д. 31.1)

[8] Bemerkung über den $p$-Rang torsionsfreier abelscher Gruppen unendlichen Ranges, Чехосл. матем. ж. **13** (1963), 1—28. [64:8, 162] (Д. 31.1)

[9] A generalization of a theorem of R. Baer, Comm. Math. Univ. Carolinae **4** (1963), 105—108. [64:11, 173] (Д. 31.4)

[10] Об однородных абелевых группах без кручения, Чехосл. матем. ж. **14** (1964), 171—202. [65:11, 185] (Д. 31.4, Д. 32.2)

[11] Заметка о квазиизоморфизме групп без кручения конечного ранга, Чехосл. матем. ж. **15** (1965), 1—8. [66:10, 137] (Д. 35.3)

[12] Über eine Klasse torsionsfreier abelscher Gruppen, Časop. Pest. Mat. **90** (1965), 153—159. [66:10, 133] (Д. 31.4)

Прюфер (Prüfer H.)

[1] Unendliche Abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung, Dissertation, 1921. (26)

[2] Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Z. **17** (1923), 35—61. (24, 25)

[3] Theorie der Abelschen Gruppen, I, Math. Z. **20** (1924), 165—187.

[4] Theorie der Abelschen Gruppen, II, Math. Z. **22** (1925), 222—249.

Рабин (Rabin M. O.)

[1] Recursive unsolvability of group theoretic problems, Ann. Math. **67** (1958), 172—194. [59:8, 7677] (Д. 15.4)

Радо (Rado R.)

[1] A proof of the basis theorem for finitely generated abelian groups, J. London Math. Soc. **26** (1951), 74—75, 160. (Д. 28.2)

Райт (Wright C. R. B.)

[1] On the nilpotency class of a group of exponent four, Pacif. J. Math. **11** (1961), 387—394. [62:3, 170] (Д. 16.3)

Рангасвами (Rangaswamy K. M.)

[1] Neat subgroups of abelian groups, J. Madras Univ. **B33** (1963), 129—135. [66:3, 172] (Д. 29.3)

[2] On Σ-groups, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 259—262. [66:2, 227] (Д. 29.4)

[3] A note on algebraic compact groups, Bull. Acad. Polon. **12** (1964), 369—371. [65:5, 186] (Д. 33.4)

[4] Full subgroups of abelian groups, Indian J. Math. **6** (1964), 21—27. [66:2, 228] (Д. 29.3)

[5] Characterisation of intersections of neat subgroups of abelian groups, J. Indian Math. Soc. **29** (1965), 31—36. [66:10, 136] (Д. 28.4, Д. 29.3)

Рапапорт (Rapaport E. S.)

[1] On free groups and their automorphisms, Acta Math. **99** (1958), 139—163. [59:8, 7791] (Д. 9.4)

[2] Groups of order 1, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 828—833. [66:1, 221] (Д. 15.2)

Редеи (Rédei L.)

[1] Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, I, Acta Math. Hung. **1** (1950), 74—98. (Д. 13.2)

[2] Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, J. reine und angew. Math. **188** (1950), 201—227. (Д. 13.3)

[3] The Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, Acta Math. Hung. **5** (1954), 169—195. [57:9, 6890] (Д. 3.2)

Редеи и Сеп (Rédei L., Szép J.)

[1] Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Záppa — Casadio, Acta sci. math. **16** (1956), 165—170. [56:12, 8612] (Д. 13.2)

Редеи и Штейнфельд (Rédei L., Steinfeld O.)

[1] Gegenseitige Schreiersche Gruppenerweiterungen, Acta sci. math. **15** (1954), 243—250. [56:2, 1081] (Д. 12.1)

Редеи и Штёр (Rédei L., Stöhr A.)

[1] Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie, Acta sci. math. **15** (1953), 7—11. [55:8, 3633] (Д. 13.3)

Рейд (Reid J. D.)

[1] A note on torsion free abelian groups of infinite rank, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 222—225. [63:8, 147] (Д. 28.3, Д. 31.7)

[2] On quasi-decompositions of torsion-free abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 550—554. [63:8, 148] (Д. 35.3)

[3] On subgroups of an abelian group maximal disjoint from a given subgroup, Pacif. J. Math. **13** (1963), 657—664. [64:6, 168] (Д. 29.4)

Рейдемейстер (Reidemeister K.)

[1] Knoten und Gruppen, Hamburg. Abh. **5** (1926), 7—23. (Заключение к 1-му изд.)

[2] Über unendliche diskrete Gruppen, Hamburg. Abh. **5** (1926), 33—39.

[3] Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig, 1932. (36, 41, Д. 7.1)

[4] Über Identitäten von Relationen, Hamburg. Abh. **16** (1949), 114—118.

Релла (Rella T.)

[1] Über Abelsche Operatorgruppen, J. reine angew. Math. **167** (1932), 235—247.

Ремак (Remak R.)

[1] Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, J. reine angew. Math. **139** (1911), 293—308. (42)

[2] Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, J. reine angew. Math. **153** (1923), 131—140.

[3] Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte, J. reine angew. Math. **163** (1930), 1—44. (Заключение к 1-му изд.)

[4] Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der

subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen, J. reine angew. Math. **164** (1931), 197—242. (Заключение к 1-му изд.)

[5] Über Untergruppen direkter Produkte von drei Faktoren, J. reine angew. Math. **166** (1931), 65—100. (Заключение к 1-му изд.)

Ремесленников В. Н.

[1] Два замечания о 3-ступенно нильпотентных группах, Алгебра и логика (семинар) **4**, № 2 (1965), 59—65. [66:7, 192] (Д. 27.1, Д. 27.3)

Ри (Ree R.)

[1] The existence of outer automorphisms of some groups, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 962—964; **9** (1958), 105—109. [58:2, 1021; 59:3, 2356] (Д. 3.1)

[2] Commutator groups of free products of torsion-free abelian groups, Ann. Math. **66** (1957), 380—394. [60:2, 1380] (Д. 7.2, Д. 24.5)

Робинсон Д. А. (Robinson D. A.)

[1] Sums of normal semi-endomorphisms, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 537—539. [64:7, 207] (Д. 3.6)

Робинсон Д. С. (Robinson D. S.)

[1] Groups in which normality is a transitive relation, Proc. Cambr. Phil. Soc. **60** (1964), 21—38. [64:9, 161] (Д. 24.4)

[2] Joins of subnormal subgroups, Ill. J. Math. **9** (1965), 144—168. [65:11, 183] (Д. 2.6)

[3] On the theory of subnormal subgroups, Math. Z. **89** (1965), 30—51. [66:2, 214] (Д. 2.6, Д. 17.4)

Рогов В. В.

[1] О группах с дополнениями, Матем. зап., Красноярск. пед. ин-т, кафедра алгебры, вып. 1, 1965, 54—58. (Д. 13.4)

Розати (Rosati L. A.)

[1] Sui gruppi ogni sottogruppo ciclico del quali é caratteristico, Boll. Unione mat. ital. **11** (1956), 544—552. [57:11, 8450] (Д. 3.2)

Розенфельд Х. М.

[1] Некоторые классы бесконечных групп с заданными свойствами индексов, Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 58—64. [63:11, 166] (Д. 16.7)

[2] О локально нормальных группах с одним свойством индексов инвариантных подгрупп, Уч. зап. Пермск. ун-та **103** (1963), 73—76. [65:1, 177] (Д. 16.7)

Розенфилд (Rosenfeld A.)

[1] Finitely generated abelian groups as unions of proper subgroups, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 1070—1073. [64:12, 170] (Д. 19.6)

Ротлендер (Rottlaender A.)

[1] Nachweis der Existenz nicht-isomorpher Gruppen von gleicher Situation der Untergruppen, Math. Z. **28** (1928), 641—653. (47б, Д. 14.4)

Ротман (Rotman J.)

[1] Torsion-free and mixed abelian groups, Ill. J. Math. **5** (1961), 131—143. [62:1, 202] (Д. 31.1, Д. 32.3)

[2] On a problem of Baer and a problem of Whitehead in abelian groups, Acta Math. Hung. **12** (1961), 245—254. [62:2, 189] (Д. 33.3)

[3] The Grothendieck group of torsion-free abelian groups of finite rank, Proc. London Math. Soc. **13** (1963), 724—732. [65:2, 268] (Д. 33.7)

Роузблед (Roseblade J. E.)

[1] On certain classes of locally soluble groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **58** (1962), 185—195. [62:11, 148] (Д. 23.2)

[2] The automorphism group of McLain's characteristically

simple group, Math. Z. **82** (1963), 267—282. [64:7, 218] (Д. 3.2)

[3] On certain subnormal coalition classes, J. of Algebra **1** (1964), 132—138. [65:4, 162] (Д. 2.6)

Рудык Б. М.

[1] К теории расщеплясмости смешанных абелевых групп, Вестн. МГУ, Матем., механ., 1965, № 3, 20—27. [65:11, 192] (Д. 32.2)

Рюкс (Rühs F.)

[1] Über ein speziellen Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie, Acta sci. math. **16** (1955), 160—164. [56:10, 7152] (Д. 13.3)

[2] Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte, J. reine und angew. Math. **198** (1957), 81—86. [58:4, 2744] (Д. 13.3)

[3] Über das allgemeine Rédeische schiefe Produkt, J. reine und angew. Math. **200** (1958), 99—111. [59:9, 8847] (Д. 13.3)

Садовский Л. Е.

[1] О структурных изоморфизмах свободных групп, ДАН СССР **32** (1941), 171—174. (Д. 14.3)

[2] Структурные изоморфизмы свободных групп и свободных произведений, Матем. сб. **14** (1944), 155—173. (47б)

[3] О структурных изоморфизмах свободных произведений групп, Матем. сб. **21** (1947), 63—82. (47б, Д. 14.3)

[4] Структура подгрупп нильпотентной группы без кручения, УМН **12** (1957), 201—204. [58:7, 5523] (Д. 14.4)

[5] О структурной определяемости локально нильпотентной группы без кручения, ДАН СССР **154** (1964), 1283—1286. [64:8, 165] (Д. 14.4)

[6] Аппроксимационная теорема и структурные изоморфизмы, ДАН СССР **161** (1965), 300—303. [65:8, 161] (Д. 14.3)

[7] Проектирования и изоморфизмы нильпотентных групп, Изв. АН СССР, сер. матем., **29** (1965), 171—208. [65:10, 174] (Д. 14.4)

Санов И. Н.

[1] Решение проблемы Бернсайда для показателя 4, Уч. зап. ЛГУ **55** (1940), 166—170. (38, Заключение к 1-му изд., Д. 16.2)

[2] Свойство одного представления свободной группы, ДАН СССР **57** (1947), 657—659.

[3] О проблеме Бернсайда, ДАН СССР **57** (1947), 759—761. (38, Д. 16.3)

[4] О некоторой системе соотношений в периодических группах с периодом степенью простого числа, Изв. АН СССР, сер. матем., **15** (1951), 477—502. (Д. 16.4)

[5] Установление связи между периодическими группами с периодом простым числом и кольцами Ли, Изв. АН СССР, сер. матем., **16** (1952), 23—58. (Д. 16.4)

Сас (Szász F.)

[1] Über Gruppen, deren sämtliche nicht-triviale Potenzen zykilsche Untergruppen der Gruppe sind, Acta sci. math. **17** (1956), 83—84. [58:2, 1016] (Д. 1.3)

[2] A characterization of the cyclic groups, Rev. math. pures et appl. RPR **1** (1956), 13—16. [61:5, 219] (Д. 1.3)

[3] Reduktion eines gruppentheoretischen Problems von O. J. Schmidt, Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 369—372. [60:9, 10024] (Д. 16.5)

[4] Bemerkung zu meiner Arbeit «Über Gruppen, deren sämtliche nicht-triviale Potenzen zykilsche Untergruppen der Gruppe sind», Acta sci. math. **23** (1962), 64—66. [63:11, 154] (Д. 1.3)

Сато (Sato S.)

[1] On groups and the lattices of subgroups, Osaka Math. J. 1 (1949), 135—149. (Д. 14.2)

[2] On the lattice homomorphisms of infinite groups, Osaka Math. J. 4 (1952), 229—234; 6 (1954), 109—118. (Д. 14.4)

Секанина (Sekanina M.)

[1] Poznámka k faktorisaci nekomutativnich grup, Časop. pěst. mat. 87 (1962), 94—97. [63:2, 187] (Д. 13.5)

Секереш (Szekeres G.)

[1] Countable abelian groups without torsion, Duke math. J. 15 (1948), 293—306. (Д. 31.1)

Секи (Seki T.)

[1] Über die Existenz der Zerfällungsgruppe in der Erweiterungstheorie der Gruppen, Tôhoku math. J. 48 (1941), 235—238. (Д. 12.1)

Сексенбаев К.

[1] Об антицентре группы, Вестн. АН Каз. ССР, 1964, № 7, 73—76. [65:2, 258] (Д. 3.3)

[2] К теории полициклических групп, Алгебра и логика (семинар) 4, № 3 (1965), 79—83. [66:7, 191] (Д. 24.3)

Селе (Szele T.)

[1] Sur la décomposition directe des groupes abéliens, C. R. Paris 229 (1949), 1052—1053.

[2] Die unendiche Quaternionengruppe, Acad. Repub. Pop. Române, Bul. Sti. 1 (1949), 799—802.

[3] Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring, Publ. Math., Debrecen, 1 (1949), 89—91. (Д. 34.1)

[4] Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen, Acta sci. math., Szeged, 13 (1950), 54—56.

[5] Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen, J. reine und angew. Math. 188 (1950), 167—192. (Д.

28.4)

[6] On a theorem of Pontrjagin, Acta Math. Hung. **2** (1951), 121—123. (Д. 28.2)

[7] On direct sums of cyclic groups, Publ. Math. **2** (1951), 76—78. (Д. 28.2)

[8] On groups with atomic layers, Acta Math. Hung. **3** (1952), 127—129. (Д. 1.2)

[9] On direct sums of cyclic groups with one amalgamated subgroup, Publ. Math. **2** (1952), 302—307. [55:1, 94] (Д. 28.3)

[10] Az egységgyökök multiplikativ csoportjáról, Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl. **3** (1953), 55—58. [56:3, 2000] (Д. 1.2)

[11] On direct decomposition of abelian groups, J. London Math. Soc. **28** (1953), 247—250. [53:2, 599] (Д. 29.1)

[12] On the basic subgroups of abelian $p$-groups, Acta Math. Hung. **5** (1954), 129—141. [55:9, 4256] (Д. 30.1)

[13] On quasi-indecomposable abelian torsion groups, Acta Math. Hung. **7** (1956), 109—114. [57:6, 4631] (Д. 30.4)

**Селе** и Селпал (Szele T. und Szélpál I.)

[1] Über drei wichtige Gruppen, Acta sci. math., Szeged, **13** (1950), 192—194. (Д. 35.2)

Селе и Сендреи (Szele T., Szendrei J.)

[1] On abelian groups with commutative endomorphism ring, Acta Math. Hung. **2** (1951), 309—324. (Д. 34.1)

Селпал (Szélpál I.)

[1] The abelian groups with torsion-free endomorphism ring, Publ. Math. **3** (1953), 106—108. [55:7, 3077] (Д. 34.1)

Сеп (Szep J.)

[1] On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, Acta sci. math., Szeged, **12A**, (1950), 57—61. (Д. 13.2)

[2] Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, Acta sci. math. **16** (1955), 54—57. [56:8, 5732] (Д. 13.2)

[3] Über eine allgemeine Erweiterung von Gruppen, I, Publ. Math. **6** (1959), 60—71. [60:6, 6205] (Д. 13.3)

Сергеев М. N.

[1] Вполне $FX$-факторизуемые группы, ДАН СССР **155** (1964), 532—534. [64:8, 176] (Д. 13.4)

Серр (Serre J. P.)

[1] Cohomologie des extensions de groupes, C. R. Paris **231** (1950), 643—646.

[2] Sur un théorème de T. Szele, Acta sci. math., Szeged, **13** (1950), 190—191.

Сесекин Н. Ф.

[1] К теории специальных групп без кручения, ДАН СССР **70** (1950), 185—188. (66, Д. 25.4)

[2] О локально нильпотентных группах без кручения, Матем сб. **32** (1953), 407—442. [53:1, 87] (Д. 25.1, Д. 25.2)

[3] О классификации метабелевых групп без кручения с конечным числом образующих, Уч. зап. Уральск. ун-та **19** (1956), 27—41. [60:2, 1382] (Д. 27.1)

[4] О произведении перестановочных полных абелевых групп, Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1962), 45—49. [64:3, 157] (Д. 13.2)

Сесекин Н. Ф. и Старостин А. И.

[1] Об одном классе периодических групп, УМН **9**, № 4, (1954), 225—228. [56:1, 222] (Д. 18.1)

Сесекин Н. Ф. и Широковская О. С.

[1] Об одном классе двуступенных групп, Матем. сб. **46** (1958), 133—142. [59:8, 7787] (Д. 24.4)

Силов (Sylow L.)

[1] Théorèmes sur les groupes de substitutions, Math. Ann. **5** (1872), 584—594. (54)

Симон (Simon H.)

[1] Noethersche Gruppen mit endlicher Hyperzentrumfaktorgruppe, Ill. J. Math. **8** (1964), 231—240. [65:3, 186] (Д. 17.5)

[2] Noethersche Gruppen mit nilpotenten Normalteilern von endlichem Index, Ill. J. Math. **8** (1964), 241—247. [65:3, 185] (Д. 17.5)

Синков (Sinkov A.)

[1] Families of groups generated by two operators of the same order, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 372—385.

[2] The groups determined by the relations

$$S^l = T^m = (S^{-1}T^{-1}ST)^p = 1,$$

II, Duke math. J. **2** (1936), 74—83. (Заключение к 1-му изд.)

[3] On the group-defining relations (2, 3, 7; p), Ann. Math. **38** (1937), 577—584. (Заключение к 1-му изд.)

Скопин А. И.

[1] Фактор-группы одного верхнего центрального ряда свободной группы, ДАН СССР **74** (1950), 425—428.

Скорца (Scorza G.)

[1] I gruppi che possono pensarti come somma di tre loro sottogruppi, Boll. Unione mat. ital. **5** (1926), 216—218. (Д. 19.6)

Скотт (Scott W. R.)

[1] Algebraically closed groups, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 118—121. (Д. 19.5)

[2] Groups and cardinal numbers, Amer. J. Math. **74** (1952), 187—197. (Д. 35.2)

[3] The number of subgroups of given index in nondenumerable abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 19—22. [55:7, 3075] (Д. 35.2)

[4] On infinite groups. Pacif. J. Math. 5 (1955), 589—598. [56:12, 8610] (Д. 35.2)

[5] On a result of B. H. Neumann, Math. Z. 66 (1956), 240. [57:7, 5365] (Д. 17.7)

[6] Half-homomorphisms of groups, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1141—1144. [58:9, 7512] (Д. 2.1)

[7] Solvable factorizable groups, II, Ill. J. Math. 4 (1960), 652—655. [61:12, 269] (Д. 13.2)

[8] Group theory, Englewood Cliffs, 1964.

Слэтер (Slater M.)

[1] A single postulate for groups, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 346—347 [62:1, 188] (Д. 1.1)

Смирнов Д. М.

[1] К теории локально нильпотентных групп, ДАН СССР 76 (1951), 643—646. (59, 67, Д. 25.6)

[2] Об автоморфизмах разрешимых групп, ДАН СССР 84 (1952), 891—894. (Д. 24.2)

[3] О группах автоморфизмов разрешимых групп, Матем. сб. 32 (1953), 365—384. [53:1, 90] (Д. 24.2)

[4] О группах с верхним центральным рядом, Матем. сб. 33 (1953), 471—484. [54:2, 2005] (Д. 25.4)

[5] Инфраинвариантные подгруппы, Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та 4 (1953), 92—96. [54:11, 5459] (Д. 25.1)

[6] Об одном классе бесконечных групп, Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та 5 (1954), 57—60. [56:2, 1078] (Д. 24.7)

[7] О двух классах разрешимых групп конечного ранга, Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та 18 (1958), 67—74. [59:9, 8844] (Д. 24.2)

[8] К теории финитно аппроксимируемых групп, Укр. матем. ж. 15 (1963), 453—457. [64:6, 164] (Д. 17.9)

[9] Об обобщенно разрешимых группах и их групповых кольцах, Матем. сб. 67 (1965), 366—383. (Д. 10.6, Д. 23.1)

Смирнов Д. М. и Тайцлин М. А.

[1] О финитно аппроксимируемых абелевых мультиоператорных группах, УМН **17**, № 5 (1962), 137—142. [63:7, 204] (Д. 17.9)

Солиан (Solian A.)

[1] О $\varkappa$-полноте в группах, Журн. чист. и прикл. матем. Акад. РНР **1** (1956), 5—22. [59:1, 142] (Д. 19.3)

Сонсяда (Sasiada E.)

[1] Об абелевых группах, всякая счетная подгруппа которых является эндоморфным образом, Бюл. Польской АН **2** (1954), 365—368. [56:2, 1089] (Д. 35.1)

[2] An application of Kulikov's basic subgroups in the theory of abelian mixed groups, Бюл. Польской АН **4** (1956), 403—405. [58:2, 1018] (Д. 32.1)

[3] Construction of directly indecomposable abelian groups of power higher than that of the continuum, Bull. Acad. Polon. **5** (1957), 701—703; **7** (1959), 23—26. [58:8, 6497; 60:12, 13577] (Д. 31.2)

[4] Proof that every countable and reduced torsion-free abelian group is slender, Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 143—144. [61:1, 213] (Д. 31.6)

[5] On the isomorphism of decompositions of torsion-free abelian groups into complete directs sums of groups of rank one, Bull. Acad. Polon. **7** (1959), 145—149. [61:5, 213] (Д. 31.5)

[6] On two problems concerning endomorphism groups, Ann. Univ. Budapest, Sec. math. **2** (1959), [illegible]—66. [61:1, 215] (Д. 34.2)

[7] Negative solution of I. Kaplansky's first test problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning cohomology groups, Bull. Acad. Polon. **9** (1961), 331—334. [62:8, 288] (Д. 31.3)

Старостин А. И.

[1] Строение вполне расщепляемого ядра локально конечных групп, Уч. зап. Уральск. ун-та **23** (1959), 29—**34**. [60:12, 13596] (Д. 19.7)

[2] Периодические локально разрешимые вполне расщепляемые группы, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1960, № 2, 168—177. [60:12, 13597] (Д. 19.7)

[3] Ядро расщепления локально конечных групп, Матем. сб. **66** (1965), 551—567. [65:10, 172] (Д. 19.7)

[4] О группах с расщепляемыми централизаторами, Изв. АН СССР, сер. матем., **29** (1965), 605—614. [66:1, 205] (Д. 19.7)

Старостин А. И. и Эйдинов М. И.

[1] О силовских базах бесконечных групп, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 273—279. [63:6, 179] (Д. 18.3)

[2] О холловских подгруппах одного класса инвариантно покрываемых групп, Сиб. матем. ж. **4** (1963), 359—376. [63:11, 167] (Д. 18.3)

Стейнберг (Steinberg A.)

[1] On free nilpotent quotient groups, Math. Z. **85** (1964), 185—196. [65:12, 226] (Д. 15.2)

Стендер П. В.

[1] О применении метода решета к решению проблемы тождества для некоторых групп со счетным множеством порождающих элементов и счетным множеством определяющих соотношений, Матем. сб. **32** (1953), 97—107. [53:1, 84] (Д. 15.4)

[2] О примитивных элементах в свободной группе ранга 2, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1962, № 5, 101—106. [63:5, 204] (Д. 9.3)

Стонехевер (Stonehewer S. E.)

[1] Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble

groups, Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 520—536. [65:3, 184] (Д. 23.2)

Стрёйк (Struik R. R.)

[1] On associative products of groups, Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956), 425—452. [59:3, 2368] (Д. 11.4)

[2] Notes on a paper by Sanov, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 638—641. [60:9, 10018] (Д. 16.4)

[3] On verbal products of groups, J. London Math. Soc. **34** (1959), 397—400. [61:9, 223] (Д. 11.4)

[4] On nilpotent products of cyclic groups, Canad. J. Math. **12** (1960), 447—462. [62:2, 202] (Д. 11.5)

[5] Notes on a paper by Sanov, II, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 758—763. [62:6, 169] (Д. 16.4)

[6] On nilpotent products of cyclic groups, II, Canad. J. Math. **13** (1961), 557—568. [63:1, 200] (Д. 11.5)

Строуд (Stroud P. W.)

[1] On a property of verbal and marginal subgroups, Proc. Cambridge Phil. Soc. **61** (1965), 41—48. [65:12, 236] (Д. 17.7)

Струнков С. П.

[1] О проблеме О. Ю. Шмидта, Сиб. матем. ж. **7** (1966), 476—479. [66:12, 163] (Д. 16.5)

Судзуки (Suzuki M.)

[1] On the lattice of subgroups of finite groups, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 345—371. (Д. 14.5)

[2] On the $L$-homomorphisms of finite groups, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 372—386. (Д. 14.4)

[3] Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, 1956. (Русский перевод: Строение группы и строение структуры ее подгрупп, ИЛ, 1960.) [57:7, 5371] (Д. 14.1, Д. 14.4)

Султанов Р. М.

[1] Про розклад абелевих груп без кручення в пряму суму циклічних підгруп, Научн. зап. Львовск. ун-та, V, сер. физ.-мат., 2 (1947), 108—115.

Сю (Hsu Nai-chao)

[1] The group of automorphisms of the holomorph of a group, Pacif. J. Math. 11 (1961), 999--1012. [62:11, 131] (Л. 3.2)

[2] The holomorphs of free abelian groups of finite rank, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 754—756. (Л. 3.2)

Сюзева В. И.

[1] Полупрямые произведения циклических групп простого порядка, Уч. зап. Пермск. ун-та 17 (1960), 69—72. [62:3, 189] (Л. 13.1)

Такахаси (Takahasi M)

[1] Bemerkungen über den Untergruppensatz im freien Produkte, Proc. Acad. Tokyo 20 (1944), 589—594. (34, Л. 7.1, Л. 9.1)

[2] On partitions of free products of groups. Osaka math. J. 1 (1949), 49—51.

[3] Note on locally free groups, J. Osaka City Univ. 1 (1950), 65—70. (Л. 9.6)

[4] Note on word subgroups in free product subgroups, J. Inst. politechn. Osaka City Univ., Ser. A., 2 (1951), 13—18. (Л. 7.1)

[5] Note on chain conditions in free groups, Osaka Math. J. 3 (1951), 221—225. (Л. 9.1)

[6] Group extensions and their splitting groups, J. Inst. politechn. Osaka City Univ. A5 (1954), 81—85. [56:10, 7151; 61:5, 228] (Л. 12.1)

Тамашке (Tamaschke O.)

[1] Die Kongruenzrelationen in Verband der zugänglichen Subnormalteiler, Math. Z. 75 (1961), 115—126. [61:9,

229] (Д. 2.6)

[2] Gruppen mit reduziblem Subnormalteilerverband, Math. Z. **75** (1961), 211—214. [61:9, 230] (Д. 2.6)

Тартаковский В. А.

[1] О процессе погашения, ДАН СССР **58** (1947), 1605—1608. (41)

[2] О проблеме тождества для некоторых типов групп, ДАН СССР **58** (1947), 1909—1910. (41)

[3] Метод решета в теории групп, Матем. сб. **25** (1949), 3—50. (41)

[4] Применение метода решета к решению проблемы тождества в некоторых типах групп, Матем. сб. **25** (1949), 251—274. (41)

[5] Решение проблемы тождества для группы с $k$-сократимым базисом при $k>6$, Изв. АН СССР, сер. матем, , **13** (1949), 483—494. (41)

[6] О примитивной композиции, Матем. сб. **30** (1952), 39—52. (41)

Таусская (Taussky O.)

[1] Über isomorphe Abbildungen von Gruppen, Math. Ann. **108** (1933), 615—620.

Тейхмюллер (Teichmüller O.)

[1] Der Elementarteilersatz für nichtkommutative Ringe, S.-B. Preuss. Akad. (1937), 169—177. (22, 22a)

Тернер-Смит (Turner-Smith R. F.)

[1] Marginal subgroup properties of outer commutator words, Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 321—341. [65:4, 140] (Д. 3.4)

Титце (Tietze H.)

[1] Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Monatsh. Math. Phys. **19** (1908), 1—118. (41)

Тобин (Tobin S.)

[1] Simple bounds for Burnside $p$-groups, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 704—706. [62:8, 149] (Д. 16.3)

Товбин А. В.

[1] О существовании центра у бесконечных и конечных групп, ДАН СССР **31** (1941), 198.

Трелл (Thrall R. M.)

[1] A note on a theorem by Witt, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 303—308.

Трельфалль (Threlfall W.)

[1] Gruppenbilder, Abh. math.-phys. Klasse Sächs. Akad. **41**, № 6 (1932), 1—59.

Тышкевич Р. И.

[1] Обобщение некоторых теорем о конечных группах, ДАН БССР **6** (1962), 471—474. [63:9, 158] (Д. 18.1, Д. 18.2)

Тьюринг (Turing A. M.)

[1] The extensions of a group, Comp. Math. **5** (1938), 357—367.

Тэйлор (Taylor R. L.)

[1] Compound group extensions, I, II, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 106—135, 304—310. [55:2, 628, 629] (Д. 12.1)

[2] Compound group extensions, III, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 490—520. [57:2, 1167] (Д. 12.1)

Тэллман (Tellman S. G.)

[1] Images of induced endomorphisms in Ext $(H, G)$, Acta Sci. Math. **23** (1962), 290—291. [64:2, 245] (Д. 33.2)

Уагнер (Wagner D. H.)

[1] On free products of groups, Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 352—378. [58:4, 2742] (Д. 7.1, Д. 7.2)

Уайголд (Wiegold J.)

[1] Groups with boundedly finite classes of conjugate

elements, Proc. Roy. Soc. **A238** (1957), 389—401. [57:10, 7658] (Д. 17.7)

[2] Nilpotent products of groups with amalgamations, Publ. Math. **6** (1959), 131—168. [61:12, 265] (Д. 8.2, Д. 11.8)

[3] On a note of B. H. Neumann, J. London Math. Soc. **35** (1960), 63—64. [60:12, 13591] (Д. 19.3)

[4] On direct factors in groups, J. London Math. Soc. **35** (1960), 310—320. [61:9, 212] (Д. 5.1, Д. 7.2)

[5] Some remarks on generalised products of groups with amalgamations, Math. Z. **75** (1961), 57—78. [63:1, 199] (Д. 8.2, Д. 11.8)

[6] Embedding group amalgams in wreath products, Math. Z. **80** (1962), 148—153. [63:5, 206] (Д. 8.2)

[7] Adjunction of elements to nilpotent groups, J. London Math. Soc. **38** (1963), 17—26. [64:8, 168] (Д. 19.4)

[8] Soluble embedding of group amalgams, Publ. Math. **12** (1965), 227—230. [66:12, 196] (Д. 8.2)

Уайтхед (Whitehead J. H. C.)

[1] On certain sets of elements in a free group, Proc. London Math. Soc. **41** (1936), 48—56.

[2] On equivalent sets of elements in a free group, Ann. Math. **37** (1936), 782—800. (35, 41, Д. 9.4)

[3] On group extensions with operators, Quart. J. (Oxford sec. series) **1** (1950), 219—228.

Узков А. И.

[1] О теореме Jordan'a-Hölder'a, Матем. сб. **4** (1938), 31—43. (44)

Уитмэн (Whitman P. M.)

[1] Groups with a cyclic group as lattice-homomorph, Ann. Math. **49** (1948), 347—351. (Д. 14.4)

Уитни (Whitney H.)

[1] Tensor products of abelian groups. Duke math. J. **4**

(1938), 495—528. (Д. 33.6)

Ульм (Ulm H.)

[1] Zur Theorie der abzählbar-unendlichen Abelschen Gruppen, Math. Ann. **107** (1933), 774—803. (28)

[2] Zur Theorie der nicht-abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Z. **40** (1935), 205—207. (26)

Уокер Е. (Walker E. A.)

[1] Cancellation in direct sums of groups, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 898—902. [58:2, 1022] (Д. 5.1)

[2] Subdirect sums and infinite abelian groups, Pacif. J. Math. **9** (1959), 287—291. [61:1, 211] (Д. 29.2)

[3] Direct summands of direct products of abelian groups, Arch. Math. **11** (1960), 241—243. [61:4, 181] (Д. 33.4)

[4] On the orders of the automorphism groups of infinite torsion abelian groups, J. London Math. Soc. **35** (1960), 385—388. [62:3, 176] (Д. 34.4)

[5] Quotient groups of reduced abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 91—92. [61:11, 207] (Д. 30.1)

[6] Torsion endomorphic images of mixed abelian groups, Pacif. J. Math. **11** (1961), 375—377. [62:6, 156] (Д. 33.4)

[7] Quotient categories and quasi-isomorphisms of abelian groups, Proc. Colloq on abelian groups, 1963, Budapest, 1964, 147—162. [66:10, 131] (Д. 35.3)

Уокер К. (Walker C. P.)

[1] Properties of Ext and quasi-splitting of abelian groups, Acta Math. Hung. **15** (1964), 157—160. [66:1, 214] (Д. 33.2, Д. 35.3)

Уос (Wos L. T.)

[1] On commutative prime power subgroups of the norm, Ill. J. Math. **2** (1958), 271—284. [60:1, 155] (Д. 3.3)

Ушаков В. И.

[1] Структурно-системные изоморфизмы непериодических локально нильпотентных групп, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1957, № 1, 223—226. [60:5, 4951] (Д. 14.6)

[2] $p$-радикальные группы, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1960. №. 6, 233—238. [61:8, 186] (Д. 20.5)

Уэйр (Weir A. J.)

[1] The Reidemeister — Schreier and Kuroš subgroup theorems, Mathematika 3 (1956), 47—55. [57:11, 8453] (Д. 7.1)

Уэстон (Weston K. W.)

[1] $ZA$-groups which satisfy the $m$-th Engel condition, Ill. J. Math. 8 (1964), 458—472. [65:9, 194] (Д. 26.2)

Фаддеев Д. К.

[1] О фактор-системах в абелевых группах с операторами, ДАН СССР, 58 (1947), 361—364. (48)

[2] К теории гомологий в группах, Изв. АН СССР, сер. матем., 16 (1952), 17—22.

Фаермарк Д. С.

[1] Алгоритм для установления тождества слов в нильпотентном произведении групп, ДАН СССР 137 (1961), 291—294. [62:1, 216] (Д. 15.4)

Федерер и Йонсон (Federer H. and Jónsson B.)

[1] Some properties of free groups, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 1—27. (36, Д. 7.2, Д. 9.1)

Федоров Ю. Г.

[1] О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс, УМН 6 № 1 (1951), 187—189. (Д. 17.7)

Фейт и Томпсон (Feit W., Thompson J. G.)

[1] Solvability of groups of odd order, Pacif. J. Math. 13 (1963), 775—1029. [65:9, 184] (Д. Предисловие)

Ферстенбэрг (Furstenberg H.)

[1] The inverse operation in groups, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 991—997. [57:1, 151] (Д. 1.1)

Фиттинг (Fitting H.)

[1] Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogen bei nicht kommutativen Gruppen, Math. Ann. **107** (1932), 514—542; **109** (1933), 616. (21)

[2] Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren. Math. Z. **39** (1934), 16—30. (42)

[3] Über die Existenzgemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Math. Z. **41** (1936), 380—395. (45, 47a, Д. 5.2)

[4] Über den Automorphismenbereich einer Gruppe, Math. Ann., **114** (1937), 84—98. (21)

[5] Die Gruppe der zentralen Automorphismen einer Gruppe mit Hauptreihe, Math. Ann. **114** (1937), 355—372.

[6] Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **48** (1938), 77—141. (Заключение к 1-му изд., Д. 27.5)

Фокс (Fox R. H.)

[1] Free differential calculus, I, II, III, Ann. Math. **57** (1953), 547—560; **59** (1954), 196—210; **64** (1956), 407—419. [55:4, 1666, 1667; 61:5, 204] (Д. 9.1, Д. 15.2)

Фомин С. В.

[1] Über periodische Untergruppen der unendlichen Abelschen Gruppen, Матем. сб. **2** (1937), 1007—1009. (Д. 29.1, Д. 32.1)

Фраттини (Frattini G.)

[1] Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni, Atti Acad. dei Lincei, Rend. (IV) **1** (1885), 281—285, 455—457. (Д. 27.4, Д. 27.5)

Фраш (Frasch H.)

[1] Die Erzeugenden der Hauptkongruenzgruppen für Primzahlstufen, Math. Ann. **108** (1933), 229—252.

Фредерик (Frederik K. N.)

[1] The Hopfian property for a class of fundamental groups, Comm. pure and appl. Math. **16** (1963), 1—8. [64:5, 179] (Д. 15.2)

Фридман А. А.

[1] О взаимоотношении между проблемой тождества ипроблемой сопряженности в конечноопределенных группах, Тр. Моск. матем. о-ва **9** (1960), 329—356. [61:3, 99] (Д. 15.4)

Фридман М. А.

[1] Полукоммутативное умножение групп и некоторые его свойства, Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **3** (1956), 112—142. [59:3, 2372] (Д. 11.7)

[2] Условие ассоциативности полукоммутативного умножения любого множества групп, Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **3** (1956), 143—148. [59:3, 2373] (Д. 11.7)

[3] Элементы конечного порядка, центр полукоммутативного произведения. Решение проблемы тождества для полукоммутативного произведения групп, Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **3** (1956), 155—167. [59:3, 2374] (Д. 11.7)

[4] Конкретные ассоциативные полукоммутативные умножения групп, Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **3** (1956), 168—183. [59:3, 2375] (Д. 11.7)

[5] О полукоммутативных умножениях, ДАН СССР **109** (1956), 710—712. [59:3, 2376] (Д. 11.7)

[6] К одному вопросу о вполне правильных операциях на классе групп, УМН **14**, № 3 (1959), 181—183. [61:9, 218] (Д. 11.7)

[7] О коммутанте полукоммутативного произведения групп, Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **6** (1959), 53—66. [61:12, 261] (Д. 11.7)

[8] Распространение одной теоремы Бэра и Леви на полукоммутативные умножения групп, Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та **6** (1959), 67—71. [61:12, 262] (Д. 11.7)

Фридман Х. (Freedman H.)

[1] The automorphisms of countable primary reduced abelian groups, Proc. London Math. Soc. **12** (1962), 77—99. [63:6, 181] (Д. 34.3)

Фробениус (Frobenius G.)

[1] Über die Kongruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul, J. reine angew. Math. **101** (1887), 273—299. (54)

Фробениус и Штикельбергер (Frobenius G. und Stickelberger L.)

[1] Über Gruppen von vertauschbaren Elementen, J. reine angew. Math. **86** (1879), 217—262. (20)

Фройденталь (Freudenthal H.)

[1] Teilweise geordnete Moduln, Proc. Akad. Wet. Amsterdam **39** (1936), 641—651.

Фукс (Fuchs L.)

[1] On subdirect unions, I, Acta Math. Hung. **3** (1952), 103—120. (Д. 6.2)

[2] The direct sum of cyclic groups, Acta Math. Hung. **3** (1952), 177—195. (Д. 28.2)

[3] Rédeian skew product of operator groups, Acta Sci. Math. **14** (1952), 228—238. (Д. 13.3)

[4] Über die Zerlegung einer Gruppe nach zwei Untergruppen, Monatsh. Math. **57** (1953), 109—112. [54:3, 2523] (Д. 2.3)

[5] On the structure of abelian $p$-groups, Acta Math. Hung. **4** (1953), 267—288. [55:11, 5623] (Д. 30.3)

[6] On a special kind of duality in group theory, II, Acta Math. Hung. **4** (1953), 299—314. [55:1, 92] (Д. 35.1)

[7] On a property of basic subgroups, Acta Math. Hung. **5**

(1954), 143—144. [55:9, 4257] (Д. 30.1)
[8] On groups with finite classes of isomorphic subgroups, Publ. Math. **3** (1954), 243—252. [57:1, 136] (Д. 17.7)
[9] On abelian torsion groups which can not be represented as the direct sum of a given cardinal number of components, Acta Math. Hung. **7** (1956), 115—124. [57:6, 4632] (Д. 30.4)
[10] On a useful lemma for abelian groups, Acta Sci. math. **17** (1956), 134—138. [58:2, 1015] (Д. 29.1)
[11] Über universale homomorphe Bilder und universale Untergruppen von abelschen Gruppen, Publ. Math. **5** (1957), 185—196. [59:6, 5571] (Д. 35.1)
[12] On a directly indecomposable abelian group of power greater than continuum, Acta Math. Hung. **8** (1957), 453—454. [59:9, 8840] (Д. 31.2)
[13] Über das Tensorprodukt von Torsionsgruppen, Acta Sci. Math. **18** (1957), 29—32. [61:5, 217] (Д. 33.6)
[14] Abelian groups, Будапешт, 1958. [61:1, 241] (Д. 13.5, Д. 28.1, Д. 28.4, Д. 29.2, Д. 29.3, Д. 30.3, Д. 31.1, Д. 31.3, Д. 31.5, Д. 31.6, Д. 32.1)
[15] On generalized pure subgroups of abelian groups, Ann. Univ. Budapest, Ser. math., **1** (1958), 41—47. [60:2, 1373] (Д. 29.3)
[16] On character groups of discrete abelian groups, Acta Math. Hung. **10** (1959), 133—140. [61:5, 214] (Д. 33.5)
[17] The existence of indecomposable abelian groups of arbitrary power, Acta Math. Hung. **10** (1959), 453—457. [60:11, 12515] (Д. 31.2)
[18] Notes on abelian groups, I, Ann. Univ. Budapest, Ser. math., **2** (1959), 5—23. [61:9, 238] (Д. 31.4, Д. 33.4—Д. 33.6)
[19] On the automorphism group of abelian $p$-groups, Publ.

Math. **7** (1960), 122—129. [61:9, 241] (Д. 34.3)

[20] Notes on abelian groups, II, Acta Math. Hung. **11** (1960), 117—125. [62:1, 199] (Д. 29.3, Д. 30.1, Д. 33.4—Д. 33.6)

[21] Note on factor groups in complete direct sums, Bull. Acad. Polon. **11** (1963), 39—40. [63:11, 157] (Д. 29.5)

Фукс, Кертес и Селе (Fuchs L., Kertész A., Szele T.)

[1] On a special kind of duality in group theory, Acta Math. Hung. **4** (1953), 169—178. [54:8, 4358] (Д. 35.1)

[2] Abelian groups in which every serving subgroup is a direct summand, Publ. Math. **3** (1953), 95—105. [55:10, 4891] (Д. 29.2)

[3] On abelian groups whose subgroups are endomorphic images, Acta sci. math. **16** (1955), 77—88. [56:7, 5113] (Д. 35.1)

[4] On abelian groups in which every homomorphic image can be imbedded, Acta Math. Hung. **7** (1956), 467—475. [58:4, 2737] (Д. 35.1)

Фукс и Селе (Fuchs L., Szele T.)

[1] Abel-csoportok egyetlen maximális alcsoporttal, Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl. **5** (1955), 387—389. [57:10, 7654] (Д. 35.4)

Фукс-Рабинович Д. И.

[1] Об одном представлении свободной группы, Уч. зап. ЛГУ **55** (1940), 154—157.

[2] О непростоте локально свободной группы, Матем. сб. **7** (1940), 327—328. (37a)

[3] Пример группы с конечным числом производяших и конечным числом соотношений, непредставимой изоморфно при помощи матриц конечного порядка, ДАН СССР **27** (1940), 425—426. (Заключение к 1-му изд.)

[4] Пример дискретной группы с конечным числом производящих

и соотношений, не имеющей полной системы линейных представлений, ДАН СССР, **29** (1940), 549—550.

[5] On the determinators of an operator of the free group, Матем. сб. **7** (1940), 197—208. (36)

[6] О группах автоморфизмов свободных произведений, I, Матем. сб. **8** (1940), 265—276. (35)

[7] О группах автоморфизмов свободных произведений, II, Матем. сб. **9** (1941), 183—220. (35)

Хаймо (Haimo F.)

[1] The *FC*-chain of a group, Canad. J. Math. **5** (1953), 498—511. [55:2, 627] (Д. 17.6)

[2] Some non-abelian extensions of completely divisible groups, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 25—28. [55:6, 2569] (Д. 19.3)

[3] Automorphisms generated by a class of subnormal subgroups, Duke Math. J. **21** (1954), 349—353. [56:1, 220] (Д. 22.3)

[4] Power-type endomorphisms of some class 2 groups, Pacif. J. Math. **5** (1955), 201—213. [56:9, 6407] (Д. 27.1)

[5] Normal automorphisms and their fixed points, Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 150—167. [57:4, 2915] (Д. 22.4)

[6] Semi-direct products with ample homomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 401—425. [58:10, 8595] (Д. 22.1)

Хайош (Hajós G.)

[1] Über einfache und mehrfache Bedeckung des $n$-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, Math. Z. **47** (1942), 427—467. (Д. 13.5)

Хакен (Haken H.)

[1] Zum Identitätsproblem bei Gruppen, Math. Z. **56** (1952), 335—362. (Д. 15.4)

Хактон (Houghton C. H.)

[1] On the automorphism groups of certain wreath products, Publ. Math. **9** (1962), 307—313. [64:1, 237] (Д. 12.4)

Хар (Haar A.)

[1] Über unendliche kommutative Gruppen, Math. Z. **33** (1931), 129—15.

[2] Über die Gruppencharaktere gewisser unendlichen Gruppen, Acta Litt. Sci., Szeged, **5** (1932), 172—186.

Харви (Harvey J.)

[1] Complete holomorphs, Pacif. J. Math. **11** (1961), 961—970. [62:11, 142] (Д. 3.2)

Харрисон (Harrison D. K.)

[1] Infinite abelian groups and homological methods, Ann. Math. **69** (1959), 366—391. [61:1, 214] (Д. 33. 2, Д. 33.4)

[2] A characterization of torsion abelian groups once basic subgroups have been chosen, Acta Math. Hung. **11** (1960), 335—339. [61:8, 193] (Д. 30.2)

[3] Two of the problems of L. Fuchs, Publ. Math. **7** (1960), 316—319. [61:9, 239] (Д. 33.6, Д. 34.2)

Харрисон, Ирвин, Пирси и Уокер E. (Harrison D. K., Irwin J. M., Peercy C. L., Walker E. A.)

[1] High extensions of abelian groups, Acta Math. Hung. **14** (1963), 319—330. [65:8, 169] (Д. 29.3, Д. 29.5)

Хартли (Hartley B.)

[1] The order-types of central series, Proc. Cambr. Phil. Soc. **61** (1965), 303—319. [66:1, 198] (Д. 25.6)

Хасимото (Hashimoto J.)

[1] Direct, subdirect decompositions and congruence relations, Osaka Math. J. **9** (1957), 87—111. [59:2, 1297] (Д. 6.1)

Хаусон (Howson A. G.)

[1] On the intersection of finitely generated free groups, J.

London Math. Soc. **29** (1954), 428—434. [56:4, 2810] (Д. 9. 1)

Хейбер и Розенфилд (Haber S., Rosenfeld A.)

[1] Groups as unions of proper subgroups, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 491—494. [60:10, 11337] (Д. 19. 6)

Хейнекен (Heineken H.)

[1] Eine Verallgemeinerung des Subnormalteilerbegriffs, Arch. Math. **11** (1960), 244—252. [61:4, 171] (Д. 2. 6)

[2] Eine Bemerkung über engelsche Elemente, Arch. Math. **11** (1960), 321. [61:8, 185] (Д. 26. 1)

[3] Über ein Levisches Nilpotenzkriterium, Arch. Math. **12** (1961), 176—178. [62:3, 181] (Д. 27. 1)

[4] Engelsche Elemente der Länge drei, Ill. J. Math. **5** (1961), 681—707. [62:10, 145] (Д. 26. 2)

[5] Endomorphismenringe und engelsche Elemente, Arch. Math. **13** (1962), 29—37. [63:9, 151] (Д. 26. 4)

[6] Commutator closed groups, Ill. J. Math. **9** (1965), 242—255. [66:1, 219] (Д. 24. 4)

[7] Linkskommutatorgeschlossene Gruppen, Math. Z. **87** (1965), 37—41. [65:6, 153] (Д. 24. 4)

Хельд (Held D.)

[1] Closure properties and partial Engel conditions in groups, Ill. J. Math. **8** (1964), 705—712. [65:8, 165] (Д. 16. 8)

[2] Nilpotenz- und Verstreutheitskriterien für artinsche Gruppen, Math. Z. **87** (1965), 49—61. [66:3, 167] (Д. 16. 8, Д. 25. 4)

Херема (Heerema N.)

[1] Sums of normal endomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 137—143. [57:11, 8455] (Д. 3. 6)

Херстейн и Рухте (Herstein J. N., Ruchte M. F.)

[1] Semi-automorphisms of groups, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 145—150. [59:3, 2362] (Д. 3. 5)

Хиггинс (**Higgins P. J.**)

[1] **Groups with multiple operators, Proc. London Math. Soc. 6** (1956), **366—416.** (Русский перевод — сб. «Математика», **3**, № 4 (**1959**), 55—106.) [57:4, 2951] (Д. 4, Д. 5.4, Д. 28.1)

[2] **Presentations of groupoids, with applications to groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. 60** (1964), 7—20. (Д. 7.1, Д. 9.1)

Хигмэн Г. (**Higman G.**)

[1] **Note on a theorem of R. Baer, Proc. Cambr. Phil. Soc. 45** (1949), 321—327.

[2] **A finitely related group with an isomorphic proper factor group, J. London Math. Soc., 26** (1951), 59—61. (38)

[3] **A finitely generated infinite simple group, J. London Math. Soc. 26** (1951), 61—64. (38)

[4] **Unrestricted free products, and varieties of topological groups, J. London Math. Soc. 27** (1952), 73—81. (Д. 7.4)

[5] **On a problem of Takahasi, J. London Math. Soc. 28** (1953), 250—252. [55:7, 3084] (Д. 9.6)

[6] **On infinite simple permutation groups, Publ. Math. 3** (1954), 221—226. [57:2, 1161] (Д. 2.4)

[7] **A remark on finitely generated nilpotent groups, Proc. Amer. Math. Soc. 6** (1955), 284—285. [56:4, 2811] (Д. 27.2)

[8] **On finite groups of exponent five, Proc. Cambr. Phil. Soc. 52** (1956), 381—390. [58:11, 9557] (Д. 16.4)

[9] **Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements, J. London Math. Soc. 32** (1957), 321—334. [58:4, 2762] (Д. 3.1)

[10] **Some remarks on varieties of groups, Quart. J. Math. 10** (1959), 165—178. [61:8, 180] (Д. 10.5)

[11] Identical relations in finite groups, Conv. intern. teoria gruppi finiti e appl., 1960, 93—100. [64:5, 166] (Д. 10. 5)

[12] Subgroups of finitely presented groups, Proc. Roy. Soc., London **A262** (1961), 455—475. [63:8, 67] (Д. 15. 3, Д. 15. 4)

[13] Amalgams of $p$-groups, J. of Algebra 1 (1964), 301—305. [65:12, 235] (Д. 8. 2)

Хигмэн Г. и Нейман Б. (Higman G., Neumann B. H.)

[1] Groups as groupoids with one law, Publ. Math. **2** (1952), 215—221. [55:4, 1674] (Д. 1. 1)

[2] On two questions of Itô, J. London Math. Soc. **29** (1954), 84—88. [55:9, 4258] (Д. 27. 4, Д. 27. 5)

Хигмэн Г., Нейман Б. и Нейман Х. (Higman G., Neumann B. H. and Neumann H.)

[1] Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc. **24** (1949), 247—254. (38, 53, Д. 15. 1)

Хигмэн Г. и Стоун (Higman G., Stone A. H.)

[1] On inverse systems with trivial limits, J. London Math. Soc. **29** (1954), 233—236. [56:9, 6454] (Д. 2. 2)

Хигмэн Д. (Higman D. G.)

[1] Lattice homomorphisms induced by group homomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 467—478. (Д. 14. 4)

Хилл (Hill P. D.)

[1] Relation of a direct limit group to associated vector groups, Pacif. J. Math. **10** (1960), 1309—1312. [61:8, 179] (Д. 2. 2)

[2] Note on a direct limit group, Amer. Math. Monthly **67** (1960), 998—1000. [62:4, 174] (Д. 28. 3)

[3] The anticenters of abelian groups, Amer. Math. Monthly **68** (1961), 898. [62:7, 160] (Д. 3. 3)

[4] Limits of sequences of finitely generated abelian groups,

Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 946—950. [63:5, 189] (Д. 28.3)

[5] On the number of pure subgroups, Pacif. J. Math. **12** (1962), 203—205. [63:11, 153] (Д. 29.2)

[6] Pure subgroups having prescribed socles, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 608—609. [66:10, 132] (Д. 29.2)

Хилл и Мегиббен (Hill P., Megibben Ch.)

[1] Minimal pure subgroups in primary groups, Bull. Soc. math. France **92** (1964), 251—257. [65:11, 191] (Д. 29.2)

Хилтон (Hilton P. J.)

[1] Remark on free products of groups, Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 478—487. [61:12, 267] (Д. 7.3)

Хилтон и Яхья (Hilton P. J., Yahya S. M.)

[1] Unique divisibility in abelian groups, Acta Math. Hung. **14** (1963), 229—239. [65:3, 189] (Д. 19.3, Д. 28.4, Д. 29.3)

Хобби (Hobby Ch.)

[1] The Frattini subgroup of a $p$-group, Pacif. J. Math. **10** (1960), 209—212. [61:6, 220] (Д. 27.4)

Холенвег (Holenveg W.)

[1] Die Dimensionsdefekte der Burnside-Gruppen mit zwei Erzeugenden, Comm. Math. Helv. **35** (1961), 169—200. (Д. 16.3)

[2] Über die Ordnung von Burnside-Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden, Comm. Math. Helv. **36** (1961), 83—90. [63:5, 201] (Д. 16.3)

Холл М. (Hall M.)

[1] Group rings and extensions I, Ann. Math. **39** (1938), 220—234.

[2] Coset representations in free groups. Trans. Amer. Math. Soc. **67** (1949), 421—432. (36)

[3] Subgroups of finite index in free groups, Canadian J.

Math. 1 (1949), 187—190.

[4] A topology for free groups and related groups. Ann. of Math. 52 (1950), 127—139. (36)

[5] Subgroups of free products, Pacif. J. Math. 3 (1953), 115—120. [53:3, 1081] (Д. 7.1)

[6] Solution of the Burnside problem for exponent six, Ill. J. Math. 2 (1958), 764—786. [60:5, 4944] (Д. 16.2, Д. 16.3)

[7] The theory of groups, New York, 1959. (Русский перевод: Теория групп, ИЛ, 1962.) [60:12, 13617] (Д. 7.1, Д. 16.2)

Холл М. и Радо Т. (Hall M. and Radó T.)

[1] On Schreier systems in free groups, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 386—408.

Холл Ф. (Hall Ph.)

[1] A note on soluble groups, J. London Math. Soc. 3 (1928), 98—105. (60, Д. 18.2)

[2] A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. London Math. Soc. 36 (1933), 29—95. (14, Д. 18.4)

[3] On a theorem of Frobenius, Proc. London Math. Soc. 40 (1935), 468—501. (Заключение к 1-му изд.)

[4] A characteristic property of soluble groups, J. London Math. Soc. 12 (1937), 198—200. (60, Д. 13.4, Д. 18.2)

[5] Complemented groups, J. London Math. Soc. 12 (1937), 201—204. (Д. 13.5)

[6] On the Sylow systems of a soluble group, Proc. London Math. Soc. 43 (1937), 316—323. (60)

[7] The classification of prime-power groups, J. reine angew. Math. 182 (1940), 130—141.

[8] Verbal and marginal subgroups, J. reine angew. Math. 182 (1940), 156—157. (Д. 3.4).

[9] On groups of automorphisms, J. reine angew. Math. **182** (1940), 194—204.

[10] The construction of soluble groups, J. reine angew. Math. **182** (1940), 206—214.

[11] The splitting properties of relatively free groups, Proc. London Math. Soc. **4** (1954), 343—356. [58:7, 5525] (Д. 10. 6)

[12] Finiteness conditions for soluble groups, Proc. London Math. Soc. **4** (1954), 419—436. [56:7, 5117] (Д. 15. 2, Д. 24. 3)

[13] Theorems like Sylow's, Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 286—304. [57:3, 2071] (Д. 18. 2)

[14] Finite-by-nilpotent groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **52** (1956), 611—616. [57:5, 3798] (Д. 3. 3, Д. 24. 7)

[15] Some sufficient conditions for a group to be nilpotent, Ill. J. Math. **2** (1958), 787—801. [61:1, 220] (Д. 20. 6, Д. 22. 3, Д. 22. 4)

[16] Periodic *FC*-groups, J. London Math. Soc. **34** (1959), 289—304. [60:10, 11327] (Д. 16. 7, Д. 23. 2)

[17] Some constructions for locally finite groups, J. London Math. Soc. **34** (1959), 305—319. [60:6, 6200] (Д. 2. 4, Д. 16. 6)

[18] On the finiteness of certain soluble groups, Proc. London Math. Soc. **9** (1959), 595—622. [60:11, 12520] (Д. 24. 4)

[19] The Frattini subgroups of finitely generated groups, Proc. London Math. Soc. **11** (1961), 327—352. [62:1, 204] (Д. 21. 1, Д. 27. 5)

[20] Wreath powers and characteristically simple groups, Proc. Cambr. Phil. Soc. **58** (1962), 170—184. [63:5, 196] (Д. 3. 2, Д. 23. 1)

[21] On non-strictly simple groups, Proc. Cambr. Phil. Soc.

**59** (1963), 531—553. [64:3, 143] (Д. 2.5, Д. 23.1, Д. 23.3)

[22] A note on $\overline{SI}$-groups, J. London Math. Soc. **39** (1964), 338—344. [65:2, 272] (Д. 9.2, Д. 23.1)

Холл Ф. и Кулатилака (Hall Ph., Kulatilaka C. R.)

[1] A property of locally finite groups, J. London Math. Soc. **39** (1964), 235—239. [65:2, 257] (Д. 16.5)

Холл Ф. и Хигмэн Г. (Hall P., Higman G.)

[1] On the $p$-length of $p$-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem, Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 1—42. [58:6, 4509] (Д. 16.4)

Хонда (Honda K.)

[1] Realism in the theory of abelian groups, I, Comm. math. Univ. St. Pauli **5** (1956), 37—75. [58:3, 1845] (Д. 29.3)

[2] From a theorem of Kulikov to a problem of Kaplansky, Comm. math. Univ. St. Pauli **6** (1957), 43—48. [59:11, 10846] (Д. 5.1)

[3] Realism in the theory of abelian groups, II, Comm. math. Univ. St. Pauli **9** (1961), 11—28. [62:6, 154] (Д. 30.3)

[4] Realism in the theory of abelian groups, III, Comm. math. Univ. St. Pauli **12** (1964), 75—111. [65:11, 187] (Д. 30.3)

Хониг (Honig Ch.)

[1] Sur les groupes sans torsion, C. R. Paris **258** (1964), 1679—1682. [65:8, 170] (Д. 31.1)

Хостинский (Hostinsky L. A.)

[1] Direct decomposition in lattices, Amer. J. Math. **73** (1951), 741—755. (Д. 5.3)

Хуляницкий (Hulanicki A.)

[1] Note on a paper of de Groot, Proc. Nederl. Akad. **A61**

(1958), 114. [59:9, 8841] (Д. 31.2)

[2] On algebraically compact groups, Bull. Acad. Polon. **10** (1962), 71—75. [63:11, 159] (Д. 29.5)

[3] The structure of the factor group of the unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups, Bull. Acad. Polon. **10** (1962), 77—80. [63:11, 160] (Д. 29.5)

Хуляницкий и Ньюмэн (**Hulanicki A., Newman M. F.**)

[1] Existence of unrestricted direct products with one amalgamated subgroup, J. London Math. Soc. **38** (1963), 169—175; **39** (1964), 672. [63:11, 174] (Д. 6.1, Д. 29.5)

Хуляницкий и Сверчковский (**Hulanicki A., Swierczkowski S.**)

[1] On group operations other than $xy$ or $yx$, Publ. Math. **9** (1962), 142—148. [63:5, 205] (Д. 1.1)

Хэд (**Head T. J.**)

[1] Dense submodules, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 197—199. [63:7, 150] (Д. 30.1)

[2] Remarks on a problem in primary abelian groups, Bull. Soc. math. France **91** (1963), 109—112. [64:2, 250] (Д. 29.2)

[3] Note on the occurrence of direct factors in groups, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 193—195. [64:11, 178] (Д. 5.1, Д. 6.2)

Цакер (**Zacher G.**)

[1] Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **22** (1953), 113—122. [54:10, 5069] (Д. 14.2)

[2] I gruppi risolubili con duale, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **31** (1961), 104—113. [62:2, 177] (Д. 14.5)

Цаленко М. С.

[1] Несколько замечаний о бесконечных простых группах, Сиб. матем. ж. **4** (1963), 227—231. [63:8, 141] (Д. 2.4, Д. 19.4)

[ 2 ] Об изоморфизмах нильпотентных произведений $p$-групп, Изв. АН СССР, сер. матем., **28** (1964), 225—236. [64:9, 163] (Д. 11.4, Д. 11.5, Д. 27.4)

[ 3 ] $R$-полные подкатегории категории групп, УМН **21**, № 1 (1966), 174—175. (Д. 20.1)

Цаппа (Zappa G.)

[ 1 ] Remark on a recent paper of O. Ore, Duke math. J. **6** (1940), 511—512.

[ 2 ] Sui gruppi di Hirsch supersolubili, Rend. Sem. mat. Univ. Padova **12** (1941), 1—11, 62—80. (59)

[ 3 ] Sul comportamente degli elementi periodici in un gruppo di Dedekind infinito, Comm. math. helv. **18** (1945), 42—44. (44)

[ 4 ] Sui sottogruppi finiti dei gruppo di Hirsch, Giorn. Mat. **2** (1948), 55—70. (59)

[ 5 ] Sulla condicione perchè un emitropismo inferiore tipico tra due gruppi sia un omotropismo, Giorn. Mat. **4** (1951), 80—101. (Д. 14.4)

[ 6 ] Costituzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro, Atti Sec. Congresso Unione Mat. Ital., Bologna, 1940, 119—125. (Д. 13.2)

[ 7 ] Sopra un'estensione di Wielandt del teorema di Sylow, Boll. Unione mat. ital. **9** (1954), 349—353. [56:2, 1065] (Д. 18.2)

[ 8 ] Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch, Ricerche mat. **7** (1958), 3—13. [59:7, 6651] (Д. 24.3)

[ 9 ] Fondamenti di teoria dei gruppi, vol. I, Roma, 1965. [67:3, 127]

Цасенхауз (Zassenhaus H.)

[ 1 ] Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier, Hamburg. Abh. **10** (1934), 106—108. (11, 16)

[ 2 ] Lehrbuch der Gruppentheorie, T. I, Leipzig, Berlin,

1937. (60, 62)

[3] **Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen, Hambrug. Abh. 12** (1938), 289—312.

Цзе Бан-чжен (Hsien Pang-chien)

[1] Chains of admissible subgroups of groups with operators, Sc. Sinica **7** (1958), 704—715. [59:11, 10851] (Д. 17.5)

Цзян У-чжун (Hsiang Wu-chung)

[1] Abelian groups characterized by their independent subsets, Pacif. J. Math. **8** (1958), 447—457. [60:12, 13578] (Д. 28.2)

Цзян У-чжун, Цзян У-и (Hsiang Wu-chung, Hsiang Wu-yi.)

[1] Those abelian groups characterized by their completely decomposable subgroups of finite rank, Pacif. J. Math. **11** (1961), 547—558. [63:1, 192] (Д. 28.2)

Цишанг (Zieschang H.)

[1] Über Worte $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_q^{a_q}$ in einer freien Gruppe mit $p$ freien Erzeugenden, Math. Ann. **147** (1962), 143—153. [63:1, 198] (Д. 9.4)

Цубои (Tsuboi T.)

[1] Note on metabelian groups, Sci. Rep. Saitama Univ. **A2** (1953), 59—62. [55:4, 1669; 55:11, 5625] (Д. 24.4)

Цыпин (Zippin L.)

[1] Countable torsion groups, Ann. Math. **36** (1935), 86—99. (27, 28)

Чабан И. А.

[1] О полукоммутативных и вербальных произведениях групп, УМН **17**, № **5** (1962), 153—155. [63:5, 207] (Д. 11.7)

Чан Ван Хао

[1] О полупростых классах групп, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 943—949. [64:6, 174] (Д. 20.1, Д. 20.3)

[2] О минимальном радикальном классе над классом абелевых групп, ДАН СССР **149** (1963), 1270—1273. [63:11, 168]

(Д. 20.4)

[3] Нильгруппы конечного ранга, Сиб. матем. ж. **5** (1964), 459—464. [65:1, 178] (Д. 26.5)

Чанг **(Chang Bomshik)**

[1] **The automorphism group of the free group with two generators, Mich. Math. J. 7** (1960), 79—81. [61:4, 174] (Д. 9.4)

**Чарин** В. С.

[1] Замечание об условии минимальности для подгрупп, ДАН СССР, **66** (1949), 575—576. (59, Д. 23.2)

[2] О полных группах с корневым рядом конечной длины, ДАН СССР, **66** (1949), 809—811. (Д. 25.2)

[3] К теории локально нильпотентных групп, Матем. сб. **29** (1951), 433—454. (65)

[4] Об условии минимальности для нормальных делителей локально разрешимых групп, Матем. сб. **33** (1953), 27—36. [54:1, 1564] (Д. 23.2)

[5] О группах автоморфизмов некоторых классов разрешимых групп, Укр. матем. ж. **5** (1953), 363—369. [54:6, 3622] (Д. 24.2)

[6] О группах автоморфизмов нильпотентных групп, Укр. матем. ж. **6** (1954), 295—304. [55:7, 3082] (Д. 27.1)

[7] К теории нильпотентных групп, Уч. зап. Уральск. ун-та **19** (1956), 21—25. [58:6, 4508] (Д. 24.7)

[8] О локально разрешимых группах конечного ранга, Матем. сб. **41** (1957), 37—48. [57:8, 6165] (Д. 23.2)

[9] О группах, обладающих разрешимыми возрастающими инвариантными рядами, Матем. сб. **41** (1957), 297—316. [58:3, 1848] (Д. 23.4, Д. 25.1)

[10] О разрешимых группах типа $A_4$, Матем. сб. **52** (1960), 895—914. [61:9, 233] (Д. 23.2, Д. 24.1)

[11] О разрешимых группах типа $A_3$, Матем. сб. **54** (1961),

489—499. [62:3, 183] (Д. 24.1)

[12] Замечание о группах, обладающих возрастающими разрешимыми инвариантными рядами, Матем. зап. Уральск. ун-та **3** (1962), 50—54. [64:3, 155] (Д. 23.4)

Чейз (Chase S.)

[1] On direct sums and products of modules, Pacif. J. Math. **12** (1962), 847—854. [64:1, 298] (Д. 33.3)

Чен (Chen K. T.)

[1] Integration in free groups, Ann. Math. **54** (1951), 147—162. (Д. 24.5)

[2] A group ring method for finitely generated groups, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 275—287. [58:11, 9570] (Д. 15.2)

Чен, Фокс и Линдон (Chen K. T., Fox R. H., Lyndon R. C.)

[1] Free differential calculus, IV, Ann. Math. **68** (1958), 81—95. [61:5, 205] (Д. 15.2)

Черников С. Н.

[1] Перенесение одной теоремы Frobenius'a на бесконечные группы, Матем. сб. **3** (1938), 413—416.

[2] К теореме Frobenius'a, Матем. сб. **4** (1938), 531—539.

[3] Бесконечные специальные группы, Матем. сб. **6** (1939), 199—214. (64)

[4] Бесконечные локально разрешимые группы, Матем. сб. **7** (1940), 35—64. (59, 63)

[5] К теории бесконечных специальных групп, Матем. сб. **7** (1940), 539—548. (59)

[6] О группах с силовским множеством, Матем. сб. **8** (1940), 377—394.

[7] К теории локально разрешимых групп, Матем. сб. **13** (1943), 317—333. (59, 64)

[8] О бесконечных специальных группах с конечным центром, Матем. сб. **17** (1945), 105—130.

[9] К теории бесконечных $p$-групп, ДАН СССР **50** (1945), 71—74.

[10] Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом, Матем. сб. **18** (1946), 397—422. (65)

[11] К теории конечных $p$-расширений абелевых $p$-групп, ДАН СССР, **58** (1947), 1287—1289. (53)

[12] Бесконечные слойно-конечные группы, Матем. сб. **22** (1948), 101—133. (53)

[13] К теории полных групп, Матем. сб. **22** (1948), 319—348, 455—456. (65, Д. 19.1)

[14] К теории специальных $p$-групп, ДАН СССР **63** (1948), 11—14.

[15] К теории локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп, ДАН СССР **65** (1949), 21—24.

[16] О полных группах с возрастающим центральным рядом, ДАН СССР **70** (1950), 965—968.

[17] О централизаторе полного абелевого нормального делителя в бесконечной периодической группе, ДАН СССР **72** (1950), 243—246.

[18] Об условии минимальности для абелевых подгрупп, ДАН СССР, **75** (1950), 345—347.

[19] Периодические $ZA$-расширения полных групп, Матем. сб. **27** (1950), 117—128. (65, 66)

[20] О специальных $p$-группах, Матем. сб. **27** (1950), 185—200. (63, 64)

[21] О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, Матем сб. **28** (1951), 119—129. (59)

[22] К теории групп без кручения, обладающих возрастающим центральным рядом, Уч. зап. Уральск. ун-та **7** (1949), 3—21. (Д. 25.2)

[23] Группы с системами дополняемых подгрупп, Матем. сб. **35**

(1954), 93—128. [56:1, 226] (Д. 13.4, Д. 29.2)

[24] О дополняемости силовских П-подгрупп в некоторых классах бесконечных групп, Матем. сб. **37** (1955), 557—566. [56: 12, 8615] (Д. 13.4, Д. 18.2)

[25] О группах с конечными классами сопряженных элементов, ДАН СССР **114** (1957), 1177—1179. [58:11, 9561] (Д. 17.7)

[26] О строении групп с конечными классами сопряженных элементов, ДАН СССР **115** (1957), 60—63. [58:10, 8589] (Д. 17.6)

[27] О слойно-конечных группах, Матем. сб. **45** (1958), 415—416. [59:5, 4470] (Д. 17.7)

[28] Условия конечности в общей теории групп, УМН **14**, № 5 (1959), 45—96. [61:8, 181] (Д. 17.1, Д. 17.3, Д. 17.4, Д. 18.1, Д. 23.1, Д. 23.2, Д. 25.2)

[29] О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами, Матем. сб. **52** (1960), 647—652. [61:5, 209] (Д. 16.5)

[30] Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп, ДАН СССР **159** (1964), 759—760. [65:4, 163] (Д. 13.4, Д. 17.4)

Черникова Н. В.

[1] Группы с дополняемыми подгруппами, Матем. сб. **39** (1956), 273—292. [57:5, 3804] (Д. 13.4)

Чехата (Chehata C. G.)

[1] Commutative extension of partial automorphisms of groups, Proc. Glasgow Math. Assoc. **1** (1955), 170—181. [57:11, 8456] (Д. 3.5)

[2] Embedding theorems for groups, Proc. Edinburgh Math. Soc. **13** (1962), 153—157. [63:11, 141] (Д. 3.5)

[3] Embedding theorems for abelian groups, Canad. J. Math. **15** (1963), 766—770. [64:9, 158] (Д. 3.5)

[4] Existence theorem for groups, Proc. Edinburgh Math. Soc. **13** (1963), 290—294. [65:2, 255] (Д. 3.5)

Чунихин С. А.

[1] О разрешимых группах, Изв. НИИММ Томского гос. ун-та **2** (1938), 220—223. (60)

[2] О $p$-свойствах групп, ДАН СССР **55** (1947), 481—484.

[3] О подгруппах относительно разрешимых групп, ДАН СССР, **58** (1947), 1295—1296.

[4] О П-отделимых группах, ДАН СССР **59** (1948), 443—445. (60)

[5] О силовски-правильных группах, ДАН СССР **60** (1948), 773—774.

[6] О П-свойствах конечных групп, Матем. сб. **25** (1949), 321—346. (60)

[7] О теоремах типа Силова, ДАН СССР **66** (1949), 165—168.

[8] Об условиях теорем типа Силова, ДАН СССР **69** (1949), 735—737.

[9] О силовских свойствах конечных групп, ДАН СССР **73** (1950), 29—32.

[10] Силовские свойства и полуинвариантные подгруппы, ДАН СССР **77** (1951), 973—975.

[11] Подгруппы конечных групп, Минск, 1964. [66:7, 179] (Д. Предисловие)

Шаар (Schaar G.)

[1] Über ein spezielles dreifaches schiefes Produkt, Acta sci. math. **25** (1964), 143—148. [65:2, 283] (Д. 13.3)

Шайн Б. М.

[1] К теореме Биркгофа — Когаловского, УМН **20**, № 6 (1965), 173—174. (Д. 10.1)

Шарль (Charles B.)

[1] Le centre de l'anneau des endomorphismes d'un groupe abélien primaire, C. R. Paris **236** (1953), 1122—1123.

[53:1, 91] (Д. 34.1)

[2] Une caractérisation des intersections de sous-groupes divisibles, C. R. Paris **250** (1960), 256—257. [60:9, 10015] (Д. 28.4)

[3] Étude sur les sous-groupes d'un groupe abélien, Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 217—227. [62:1, 201] (Д. 29.2)

[4] Sous-groupes de base des groupes abéliens primaires, Sém. Dubreil et Pisot **13** (1961), 17.1—17.7. [62:11, 140] (Д. 30.1)

[5] Note sur la structure des groupes abéliens primaires, C. R. Paris **252** (1961), 1547—1548. [62:6, 155] (Д. 30.3)

Шатле (Chatelet A.)

[1] Les groupes abéliens finis et les modules de points entière, Paris — Lille, 1925.

Шеврин Л. Н.

[1] О структурных свойствах полугрупп, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 446—470. [63:3, 198] (Д. 14.6)

[2] Структурно-подполугрупповая характеристика коммутативных непериодических групп, Сиб. матем. ж. **5** (1964), 671—678. [65:2, 307] (Д. 14.6)

Шевцов Г. С.

[1] Полупрямые произведения рациональных групп, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1958, № 1, 184—201. [59:3, 2367] (Д. 13.1)

[2] К вопросу о рациональных инвариантных подгруппах полуразложимой группы, Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 91—97. [63:10, 157] (Д. 23.4)

[3] К вопросу о понятии полупрямого произведения групп, Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 98—103. [63:8, 155] (Д. 13.1)

[4] О коммутанте полупрямого произведения групп, Уч. зап.

Пермск. ун-та **103** (1963), 108—110. [64:11, 177] (Д. 13.1)

Шевцов Г. С. и Хлебутина В. И.

[1] Смешанные полуразложимые группы, Уч. зап. Пермск. ун-та **22** (1962), 104—115. [63:10, 158] (Д. 13.1)

Шеницер (Shenitzer A.)

[1] Decomposition of a group with a single defining relation into a free product, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 273—279. [56:6, 4353] (Д. 15.2)

Шенкман (Schenkman E.)

[1] A generalization of the central elements of a group, Pacif. J. Math. **3** (1953), 501—504. [54:1, 1565] (Д. 26.3)

[2] Two theorems on finitely generated groups, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 497—498. [56:1, 215] (Д. 16.2)

[3] On the structure of the automorphism group, Portug. Math. **13** (1954), 129—135. [58:7, 5522] (Д. 18.1, Д. 25.5)

[4] A splitting theorem and the principal ideal theorem for some infinitely generated groups, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 870—873. [57:10, 7661] (Д. 13.1)

[5] The similarity between the properties of ideals in commutative rings and the properties of normal subgroups of groups, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 375—381. [59:6, 5580] (Д. 17.5)

[6] The equation $a^n b^n = c^n$ in a free group, Ann. Math. **70** (1959), 562—564. [60:10, 11334] (Д. 9.1)

[7] On the norm of a group, Ill. J. Math. **4** (1960), 150—152. [60:12, 13599] (Д. 3.3)

[8] The basis theorem for finitely generated abelian groups, Amer. Math. Monthly **67** (1960), 770—771. [61:9, 237] (Д. 28.2)

Шенкман и Уэйд (Schenkman E., Wade L. I.)

[1] The mapping which takes each element of a group into its *n*-th power, Amer. Math. Monthly **65** (1958), 33—34. [59:3, 2357] (Д. 3.5)

Шик (Schiek H.)

[1] Ähnlichkeitsanalyse von Gruppenrelationen, Acta Math. **96** (1956), 157—252. [58:11, 9566] (Д. 15.4)

[2] Adjunktionsproblem und inkompressible Relationen. Math. Ann. **146** (1962), 314—320. [63:8, 158] (Д. 19.5)

[3] Das Adjunktionsproblem der Gruppentheorie, Math. Ann. **147** (1962), 158—165. [63:8, 159] (Д. 19.5)

Ширшов А. И.

[1] О некоторых группах, близких к энгелевым, Алгебра и логика (семинар) **2** (1963), 5—18. [64:11, 159] (Д. 26.2, Д. 26.6)

Шифман (Shiffman M.)

[1] The ring of automorphisms of an abelian group, Duke math. J. **6** (1940), 579—597. (21)

Шмейдлер (Schmeidler W.)

[1] Bemerkungen zur Theorie der abzählbaren Abelschen Gruppen, Math. Z. **6** (1920), 274—280.

Шмелькин А. Л.

[1] К теории правильных произведений групп, Матем. сб. **51** (1960), 277—292. [61:9, 220] (Д. 11.3, Д. 11.4)

[2] Нильпотентные произведения и нильпотентные группы без кручения, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 625—640. [63:4, 154] (Д. 11.5, Д. 19.4)

[3] Одно свойство полупростых классов групп, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 950—951. [64:6, 175] (Д. 20.1)

[4] Об изоморфизме нильпотентных разложений нильпотентных групп без кручения, Сиб. матем. ж. **4** (1963), 1412—1425. [64:8, 174] (Д. 11.5)

[5] Полугруппа многообразий групп, ДАН СССР **149** (1963), 543—545. [63:8, 161] (Д. 10.4)

[6] Свободные полинильпотентные группы, Изв. АН СССР, сер. матем., **28** (1964), 91—122. [64:8, 170] (Д. 12.3, Д. 24.5, Д. 24.6)

[7] О разрешимых произведениях групп, Сиб. матем. ж. **6** (1965), 212—220. [65:9, 196] (Д. 11.2, Д. 11.3, Д. 11.5, Д. 11.6, Д. 24.5)

[8] Сплетения и многообразия групп, Изв. АН СССР, сер. матем., **29** (1965), 149—170. [65:9, 195] (Д. 9.2, Д. 10.5, Д. 10.6, Д. 12.3)

Шмидт О. Ю.

[1] Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, Изв. Киевского ун-та 1912, 1—6. (42)

[2] Sur les produits directs, Bull. Soc. Math. France **41** (1913), 161—164. (42)

[3] Абстрактная теория групп, Киев, 1916; 2-е изд., Москва, 1933; Избранные труды, Математика, М. 1959, 17—175. (Д. 24.4)

[4] Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, Math. Z. **29** (1928), 34—41. (42, 47a)

[5] Новое доказательство теоремы А. Кулакова в теории групп, Матем. сб. (стар. серия) **39** (1932), № 1—2, 66—71.

[6] О бесконечных специальных группах, Матем. сб. **8** (1940), 363—375. (54, 63, 64)

[7] Бесконечные разрешимые группы, Матем. сб. **17** (1945), 145—162. (53, 57—59)

[8] Группы, все подгруппы которых специальные, Матем. сб. (стар. серия) **31** (1924), 366—372. (Д. 27.1)

[9] Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп, Избранные труды, Математика, М., 1959, 298—300. [60:6, 6065] (Д. 19.7)

Шода (Shoda K.)

[1] Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Ann. **100** (1928), 674—686. (21)

[2] Über die charakteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Z. **31** (1930), 611—624.

[3] Über den Automorphismenring bzw. die Automorphismengruppe einer endlichen Abelschen Gruppe, Proc. Acad. Tokyo **6** (1930), 9—11. (21)

[4] Gruppentheoretischer Beweis des Äquivalenz und Enthaltenseinsatzes in der Theorie der Matrizen mit ganzen Koeffizienten, Proc. Acad. Tokyo **6** (1930), 217—219.

[5] Über die Automorphismen einer endlichen zerlegbaren Gruppe, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2** (1930), 25—50. (Заключение к 1-му изд.)

[6] Über direkt zerlegbare Gruppen, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2** (1930), 51—72. (Заключение к 1-му изд.)

[7] Bemerkungen über vollständig reduzible Gruppen, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2** (1931), 203—209.

[8] Über die Schreiersche Erweiterungstheorie, Proc. Acad. Tokyo **19** (1943), 518—519. (Д. 12.1)

Шолендер (Sholander M.)

[1] Postulates for commutative groups, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 93—95 [60:10, 11320] (Д. 1.1)

Шольц (Scholz A.)

[1] Die Behandlung der zweistufigen Gruppe als Operatorengruppe, S.-B. Heidelberg. Akad. **2** (1933), 17—22.

Шпейзер (Speiser A.)

[1] Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 1923; 2 Aufl., 1927; 3 Aufl., 1937.

Шпекер (Specker E.)

[1] Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen, Port. Math. **9** (1950), 131—140. (Д. 28.3, Д. 31.6, Д. 33.5)

Шпехт (Specht W.)

[1] Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen, Math. Z. **37** (1933), 321—341.

[2] Gruppentheorie, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956. [59: 6, 5598] (Д. 3.2, Д. 5.2, Д. 5.4, Д. 7.1, Д. 21.1, Д. 21.2, Д. 27.5)

[3] Beiträge zur Gruppentheorie, I, Lokalendliche Gruppen, Math. Nachr. **18** (1958), 39—56. [59:8, 7788] (Д. 16.5, Д. 20.4)

Шрейер И. и Улам (Schreier J. und Ulam S.)

[1] Sur le groupe des permutations de la suite des nombres naturels. C. R. Paris **197** (1933), 737—738.

[2] Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge, Studia Math. **4** (1933), 134—141.

[3] Über die Automorphismen der Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge, Fund. Math., **28** (1937), 258—260. (13)

Шрейер О. (Schreier O.)

[1] Über die Gruppen $A^aB^b=1$. Hamburg. Abh. **3** (1924), 167—169. (Заключение к 1-му изд.)

[2] Über die Erweiterung von Gruppen, I, Monatsh. Math. Phys., **34** (1926), 165—180. (48)

[3] Über die Erweiterung von Gruppen, II, Hamburg. Abh. **4** (1926), 321—346. (48)

[4] Die Untergruppen der freien Gruppen, Hamburg. Abh. **5** (1927), 161—188. (35, 36, 48, Заключение к 1-му изд.)

[5] Über den Jordan-Hölderschen Satz, Hamburg. Abh. **6** (1928), 300—302. (16)

Штейн (Stein K.)

[1] Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem, Math. Ann. **123** (1951), 201—222.

(Д. 33.3)

Штейниц (Steinitz E.)

[1] Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, Math. Ann., **71** (1912), 328—354; **72** (1912), 297—345.

Шунков В. П.

[1] О группах, разложимых в равномерное произведение своих $p$-групп, ДАН СССР **154** (1964), 542—544. [64:10, 177] (Д. 13.2)

[2] К теории обобщенно разрешимых групп, ДАН СССР **160** (1965), 1279—1282. [65:7, 170] (Д. 16.5)

Шур (Schur I.)

[1] Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen, S.-B. Preuss. Akad. (1911), 619—627. (Заключение к 1-му изд.)

[2] Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. reineangew. Math. **127** (1904), 20—50. (49, Д. 17.7)

Шю (Shü S.)

[1] On the common representative system of residue classes of infinite groups, J. London Math. Soc. **16** (1941), 101—104.

Шютценбергер (Schützenberger M. P.)

[1] Nouvelle démonstration du théorème de Schreier sur les sous-groupes d'un groupe libre par son extension au cas des demi-groupes libres, Sém. Dubreil, Dubreil-Jacotin et Pisot, 1957—1958, 6.1—6.6. [60:2, 1389] (Д. 9.1)

[2] Sur l'équation $a^{2+n}=b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre, C. R. Paris **248** (1959), 2435—2436. [60:10, 11333] (Д. 9.1)

Щепин Г. Г.

[1] К вопросу о постулатах Маклейна и Мальцева для одного класса правильных операций на группах, УМН **20**, № 3

(1965), 219—226. [65:12, 239] (Д. 11.7)

Шукин К. К.

[1] Первичные группы, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **39** (1959), 209—218. [61:1, 218] (Д. 6.2)

[2] Первичные полумаксимальные нормальные делители, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **54** (1960), 3—7. [62:3, 184] (Д. 6.2)

[3] О локально разрешимом радикале одного класса групп, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **54** (1960), 95—100. [62:3, 191] (Д. 20.5)

[4] *RI**-разрешимый радикал групп, Матем. сб. **52** (1960), 1021—1031. [62:7, 165] (Д. 20.6)

[5] Замечания о первичных группах, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **50** (1962), 9—11. [63:8, 149] (Д. 6.2)

[6] К теории радикалов в группах, Сиб. матем. ж. **3** (1962), 932—942. [63:8, 151] (Д. 20.1, Д. 20.2)

Эверетт (Everett C. J.)

[1] The basis theorem for vector spaces over rings. Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 531—532. (22)

Эйдинов М. И.

[1] О группах без П-кручения, Уч. зап. Уральск. ун-та **19** (1956), 61—68. [58:6, 4506] (Д. 19.1, Д. 26.2)

[2] П-радикальные группы, Матем. зап. Уральск. ун-та **3**, № 3 (1962), 60—68. [64:3, 156] (Д. 20.4)

[3] О П-изолированном базисе покрытия П*R*-группы, Матем. зап. Уральск. ун-та **4**, № 3 (1963), 69—75. [64:9, 147] (Д. 19.1, Д. 19.7)

Эйленберг и Маклейн С. (Eilenberg S. and MacLane S.)

[1] Group extensions and homology, Ann. Math. **43** (1942), 757—831. (52, Д. 33.1, Д. 33.5)

[2] Natural isomorphisms in group theory, Proc. Nat. Acad. USA **28** (1942), 537—543.

[3] General theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 231—294.

[4] Cohomology theory in abstract groups, I. Ann. Math. **48** (1947), 51—78. (**49**)

[5] Cohomology theory in abstract groups, II, Ann. Math. **48** (1947), 326—341. (**48, 51**)

[6] Algebraic cohomology groups and loops, Duke J. **14** (1947), 435—463. (48, 49)

Эйюб (Ayoub C. W.)

[1] A theory of normal chains, Canad. J. Math. **4** (1952), 162—188. (Д. 18.1)

[2] On the primary subgroups of a group, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 450—466. (Д. 18.1)

[3] Sylow theory for a certain class of operator groups, Canad. J. Math. **13** (1961), 192—200. [62:1, 207] (Д. 18.1)

Экман (Eckmann B.)

[1] Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe, Comm. Math. Helv. **18** (1946), 232—282.

Экман и Хилтон (Eckmann B., Hilton P. J.)

[1] Structure maps in group theory, Fund. Math. **50** (1961), 207—221. [63:12, 180] (Д. 7.3, Д. 27.1)

Элперин (Alperin J. L.)

[1] Groups with finitely many automorphisms, Pacif. J. Math. **12** (1962), 1—5. [63:4, 147] (Д. 3.1, Д. 15.1)

Эне (Ene D.)

[1] Asupra $K$-grupurilor infinite, Studii şi cert. mat., Acad. RPR **15** (1964), 455—458. [65:2, 259] (Д. 14.2)

Энокс (Enochs E.)

[1] Isomorphic refinements of decompositions of a primary group into closed groups, Bull. Soc. math. France **91** (1963), 63—75. [64:8, 161] (Д. 30.2)

[2] Extending isomorphisms between basic subgroups, Arch. Math. 15 (1964), 175—178. [66:1, 218] (Д. 30.2)

Эппл и Джоруп (Appel K. I., Djorup F. M.)

[1] On the group generated by a free semigroup, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 838—840. [65:3, 195] (Д. 9.6)

Эпстейн (Epstein D. B. A.)

[1] A result on free products with amalgamation, J. London Math. Soc. 37 (1962), 130—132. [63:4, 152] (Д. 8.1)

Эрдеи (Erdélyi M.)

[1] On $n$-algebraically closed groups, Publ. Math. 7 (1960), 310—315. [61:10, 198] (Д. 3.2, Д. 19.5)

[2] Abel-féle csoportok korláfos elemrendü direkt összeadandóiról, Acta Univ. Debrecen 7 (1961), 39—44. [63:5, 190] (Д. 29.1)

Эрдёш (Erdös J.)

[1] The theory of groups with finite classes of conjugate elements, Acta Math. Hung. 5 (1954), 45—58. [56:2, 1080] (Д. 17.6, Д. 17.7)

[2] On direct decompositions of torsion free abelian groups, Publ. Math. 3 (1954), 281—288. [58:2, 1019] (Д. 31.4)

[3] Torsion-free factor groups of free abelian groups and a classification of torsion-free abelian groups, Publ. Math. 5 (1957), 172—184. [59:4, 3537] (Д. 31.1)

[4] On the splitting problem of mixed abelian groups, Publ. Math. 5 (1958), 364—377. (Д. 32.1)

Эренфойхт (Ehrenfeucht A.)

[1] О проблеме И. Г. Ц. Уайтхеда из теории абелевых групп, Бюлл. Польской АН 3 (1955), 127—129. [56:6, 4346] (Д. 31.7)

Эренфойхт и Лось (Ehrenfeucht A., Łoś J.)

[1] О декартовых произведениях бесконечных циклических групп,

Бюлл. Польской АН 2 (1954), 265—267. [56:2, 1085] (Д. 33.5)

Яковлев Б. В.

[1] Структурные изоморфизмы метабелевых групп степени $p$, Матем. зап., Красноярск. пед. ин-т, кафедра алгебры, вып. 1, 1965, 59—68. (Д. 14.4)

Ямабе (Yamabe H.)

[1] A condition for an abelian group to be a free abelian group with a finite basis, Proc. Jap. Acad. 27 (1951), 205—207. (Д. 28.3)

Янко (Janko Z.)

[1] Über das Rédeische schiefe Produkt vom Typ $G\odot\Gamma$, Acta Sci. Math. 21 (1960), 4—6. [61:7, 216] (Д. 13.3)

[2] Über das nicht ausgeartete Rédeische schiefe Produkt $G\odot\Gamma$, Acta Sci. Math. 21 (1960), 144—153. [62:2, 209] (Д. 13.3)

[3] Szépsche Erweiterung von Gruppen mit Operatoren, Glasnik mat. -fiz. i astr. 15 (1960), 8—8. [61:8, 200] (Д. 13.3)

Яхья (Yahya S. M.)

[1] $P$-pure exact sequences and the group of $P$-pure extensions, Ann. Univ. Budapest 5 (1962), 179—191. [63:12, 179] (Д. 33.2)

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝群论（下册）
作者＝（苏）Ａ·Γ·库洛什
页数＝４５６
ＳＳ号＝１０１０１７６８
出版日期＝１９８２年１１月第１版